

## İÇİNDEKİLER

| No | Konular                                | Sayfa N. |
|----|--|----------|
| 0  | İçindekiler                            | 1        |
|    | <b>KPSS – ALES – YGS – LYS</b>         |          |
| 1  | Temel Kavramlar, Sayı Sistemleri       | 2        |
| 2  | Doğal Sayılarda Bölme, Bölünebilme     | 3        |
| 3  | Asal Çarpanlara Ayırma, EKOK – EBOB    | 4        |
| 4  | Rasyonel Sayılar                       | 5        |
| 5  | Basit Eşitsizlik ve Sıralama           | 6        |
| 6  | Mutlak Değer                           | 7        |
| 7  | Üslü Değer                             | 7        |
| 8  | Köklü Değer                            | 8        |
| 9  | Çarpanlara Ayırma ve Sadeleştirme      | 9        |
| 10 | Oran – Orantı                          | 9        |
| 11 | Denklem Çözme                          | 10       |
| 12 | Sayı, Kesir, Yaş, Hareket Problemleri  | 10       |
| 13 | İşçi – Havuz Problemleri               | 13       |
| 14 | Yüzde, Kar – Zarar ve Faiz Problemleri | 14       |
| 15 | Karışım Problemleri                    | 16       |
| 16 | Grafik Problemleri                     | 16       |
| 17 | Kümeler                                | 17       |
| 18 | İşlem                                  | 19       |
| 19 | Modüler Aritmetik                      | 20       |
| 20 | Permütasyon – Kombinasyon              | 21       |
| 21 | Olasılık                               | 23       |
|    | <b>ALES</b>                            | 25       |
|    | Yakında...                             |          |

**A. TEMEL KAVRAMLAR, SAYI SİSTEMLERİ**

**Çarpma – Bölme İşlemleri:**

|                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $(+) * (-) = (-)$       | $(-) * (-) = (+)$       | $(+) * (+) = (+)$       |
| $\frac{(+)}{(-)} = (-)$ | $\frac{(-)}{(-)} = (+)$ | $\frac{(+)}{(+)} = (+)$ |

**İşlem Sırası:**

1. Önce parantez içi ve bütünü işlemler yapılır.
2. Üs (kuvvet) varsa üs alınır.
3. Çarpma / bölme işlemi yapılır.
4. Toplama / çıkarma işlemi yapılır.

**Örnek:**

$$(2 + (3) * 4) + 2^3 / 4 = (2 + 12) + 8 / 4 = 14 + 2 = 16$$

**Sayı Kümeleri:**

- \* Rakam = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  - \* Sayı =  $(-\infty, +\infty)$
  - \* Doğal Sayı =  $N = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$
  - \* Sayma Sayı =  $N^+ = \{1, 2, \dots, +\infty\}$
  - \* Tamsayılar =  $Z = \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$
  - \* Tamsayılar =  $Z = Z + \{0\} + Z^+$
  - \* Reel Sayılar =  $R = (-\infty, +\infty) = Q \cup Q'$
  - \* Rasyonel Sayılar =  $Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z \text{ ve } b \neq 0 \right\}$
  - \* İfadenin üç durumu:  $x = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=0, b \neq 0, & x=0 \\ a \neq 0, b=0, & x=\text{belirsiz} \\ a \neq 0, b \neq 0, & x=\text{tanımsız} \end{cases}$
  - \* İrrasyonel Sayılar =  $Q' = \sqrt{2}, \sqrt[3]{7}, \pi, \dots$  net olmayan
  - \* Çift sayılar =  $\mathcal{C} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
  - \* Tek sayılar =  $T = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
- |   |   |                               |                      |
|---|---|-------------------------------|----------------------|
| $T \pm T = \mathcal{C}$                     | $T * T = T$                               | $n \in Z^+$ için,             | $\mathcal{C} \neq 0$ |
| $T \pm \mathcal{C} = T$                     | $T * \mathcal{C} = \mathcal{C}$           | $T^n = T$                     | $\mathcal{C}^0 = 1$  |
| $\mathcal{C} \pm \mathcal{C} = \mathcal{C}$ | $\mathcal{C} * \mathcal{C} = \mathcal{C}$ | $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}$ | $T^0 = 1$            |
- \*  $x \neq 0 \Rightarrow x^0 = 1$
  - $x = 0 \Rightarrow 0^0 = \text{Tanımsız}$

**Pozitif – Negatif Sayılarda İşlemler:**

$$a < b < 0 < c < d$$

- İki pozitif sayının toplamı pozitif, iki negatif sayının toplamı ise negatiftir.  
 $c + d > 0, a + b < 0, |a| > c \Rightarrow a + c < 0, \text{ vb.}$
- Aynı işaretli iki sayının çarpımı / bölümü pozitif, zıt işaretli olan ise negatiftir.  
 $c * d > 0, a * b > 0, b * d < 0, \frac{a}{c} < 0, \frac{b}{a} > 0, \text{ vb.}$
- Pozitif sayının bütün kuvvetler (tek, çift fark etmez) pozitif, negatif sayının tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri pozitifdir.  
 $c^{\text{Çift}} > 0, d^{\text{Tek}} > 0, a^{\text{Çift}} > 0, b^{\text{Tek}} < 0, \mathcal{C}^0 = T^0 = 1$

**Örnek:**  $a^2 * b < 0, b * c^3 > 0, \frac{a}{c} > 0$  ise a, b, c işaretleri?

$$a^2 * b < 0 \Rightarrow b < 0; b * c^3 > 0 \Rightarrow - * - > 0 \Rightarrow c < 0$$

$$\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow \frac{-}{-} > 0 \Rightarrow a < 0 \text{ ise } a (-), b (-), c (-) \text{ olur.}$$

**Asal Sayılar:**

- \* 1 ve kendisinden başka pozitif tam bölünen olmayan ve 1'den büyük tam sayılardır. En küçük ve tek çift asal sayı 2'dir.
- \* **Asal sayılar:** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, vb.

**Aralarında Asal Sayılar:**

- \* 1'den başka pozitif tam bölünen olmayan en az iki tam sayı. a ile b, x ile y aralarında asal sayılar ise;

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{a = x} \text{ ve } \boxed{b = y}$$

**Örnek:** 5 ile 7; 10 ile 21; vb. aralarında ikili asal sayı. (Aralarında 1'den başka bölünen yoktur.)

**Örnek:** 12, 15, 20 aralarında asal sayı. (12 ile 15 arasında 3'e bölünen varsa da 20'de 3'e bölünen yok.)

**Örnek:**  $(2x-1)$  ile  $(3y+2)$  aralarında asal;

$$\frac{3y+2}{2x-1} = \frac{35}{63} \Rightarrow \frac{3y+2}{2x-1} = \frac{5}{9} \Rightarrow \begin{cases} 3y+2=5 \\ 2x-1=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=5 \end{cases}$$

**Ardışık Sayılar:**

- \* Ardışık sayma sayıları: 1, 2, 3, 4, ..., n, ...
- \* Ardışık çift sayma sayıları: 2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...
- \* Ardışık tek sayma sayıları: 1, 3, 5, 7, 9, ..., 2n-1, ...
- \* Ardışık tam sayılar: n, n+1, n+2, n+3, ...
- \* Ardışık çift tam sayılar: 2n, 2n+2, 2n+4, ...
- \* Ardışık tek tam sayılar: 2n-1, 2n+1, 2n+3, ...
- \* Ardışık sayılar arası fark  $\pm 1$ , çift ve teklerde fark  $\pm 2$ .

$$* 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n * (n + 1)}{2}$$

$$* 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n * (n + 1)$$

$$* 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

**T.S. :** Terim Sayısı, **S.T. :** Son Terim, **İ.T. :** İlk terim, **A. :** Artış Miktarı, **T.T. :** Terimler Toplamı.

$$* T.T. = T.S. * \frac{S.T. + İ.T. + A.}{2}$$

$$\bullet T.S. = \frac{S.T. - İ.T.}{A.} + 1 \Rightarrow a \leq x \leq b$$

$$\bullet T.S. = \frac{S.T. - İ.T.}{A.} \Rightarrow a < x \leq b$$

$$\bullet T.S. = \frac{S.T. - İ.T.}{A.} - 1 \Rightarrow a < x < b$$

**Ardışık sayılarda ortadaki sayı bulma yöntemleri:**

$$* \text{OrtaSayı} = \frac{\text{Sayı} \cdot \text{Toplam}}{\text{Sayı} \cdot \text{A det}}$$

**Örnek:** Ardışık 4 doğal sayı toplamı 62:

$$\text{OrtaSayı} = \frac{62}{4} = 15,5 \Rightarrow \pm 0,5 \text{ eklenir ve tam sayı yapılır.}$$

|         |           |             |           |         |
|---------|-----------|-------------|-----------|---------|
| $\pm 1$ | $\pm 0,5$ | <b>15,5</b> | $\pm 0,5$ | $\pm 1$ |
| 14      | 15        | X           | 16        | 17      |

**Örnek:** Ardışık 4 tek sayı toplamı 80;

$$\text{OrtaSayı} = \frac{80}{4} = 20 \notin T \Rightarrow \pm 1 \text{ eklenir ve tek sayı yapılır.}$$

|         |         |           |         |         |
|---------|---------|-----------|---------|---------|
| $\pm 2$ | $\pm 1$ | <b>20</b> | $\pm 1$ | $\pm 2$ |
| 17      | 19      | X         | 21      | 23      |

İşlemlerde tek sayı çıkmazsa  $\pm 0,5, 1, \text{ vb.}$  rakamlar sağa sola eklenir. Diğerlerinde ana kural geçerlidir.

**Faktöriyel:**

\*  $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \dots * n = n!$  (Faktöriyel)  
 \*  $n! = n * (n - 1)! = n * (n - 1) * (n - 2)!$   
 \*  $0! = 1! = 1$

\*  $n!$  basamaklı sayının sondan x basamağı sıfır ise;

$$\left. \begin{array}{l} n = 5 * a + b \quad a \geq 5 \\ a = 5 * c + d \quad c \geq 5 \\ c = 5 * e + f \quad e < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = a + c + e$$

\*  $n \geq 0$ , a asal sayı; x, y pozitif tam sayı olmak üzere;

$n! = a^x * y$  ifadede x'in en büyük değeri için n/a işlemleri sürekli yapılır ve elde edilen bölümler toplanır.

$$\left. \begin{array}{l} n = a * b + c \quad b \geq a \\ b = a * d + e \quad d \geq a \\ d = a * f + g \quad f < a \end{array} \right\} \Rightarrow x_B = b + d + f$$

**Örnek:** m, n pozitif tam sayı,  $15! = 6^m * n \Rightarrow m_B = ?$

$15! = (2 * 3)^m * n \Rightarrow 15 = 3 * 5 + 0 \Rightarrow 5 = 3 * 1 + 2 \Rightarrow m_B = 5 + 1 = 6$

**Taban:**

\* a, b, c, d, e < x olmak üzere (x taban); 10'luk tabana geçiş:

$$(abc, de)_x = e * x^{-2} + d * x^{-1} + c * x^0 + b * x^1 + a * x^2 = (A)_{10}$$

\* 10'luk tabandaki bir sayıyı x tabana geçirmek için:

$$(B)_{10} = (A)_x \Rightarrow B / x \text{ yapılır ve son kalandan itibaren}$$

soldan sağa doğru yazılırlar:  $(A)_x = (k_S \dots k_2 k_1)_x$

**Örnek:**  $25 = (A)_4 \Rightarrow A = ?$

$$\begin{array}{r} 25 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 4 \\ \hline k_1 \textcircled{1} \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad k_2 \textcircled{2} \end{array} \quad 25 = (k_2 k_1)_4 = (21)_4$$

**Örnek:**  $(312)_5 = A \Rightarrow A = ?$

$(312)_5 = A = 2 * 5^0 + 1 * 5^1 + 3 * 5^2 = 82$

\* Farklı tabanlarda dönüşümlerde 10'luk tabana çevirerek yapılır.  $(A)_x = (B)_y \Rightarrow (A)_x = (C)_{10} = (B)_y$

\*  $a^n$  sayısı a tabanında yazılırsa (n+1) basamaklı olur.

**Örnek:**  $3^6 = (A)_3 \Rightarrow A = ?$

$3^6 = (A)_3 = (1000000)_3$  (Yani değer kadar 0, 7.si 1)

\*  $abcd = 1000 * a + 100 * b + 10 * c + d$  (Dört basamaklı)

**d:** Birler, **c:** Onlar, **b:** Yüzler, **a:** Binler basamağı.

**Örnek:**  $325 = 3 * 100 + 2 * 10 + 5$

**Örnek:**  $10200 = 1 * 10000 + 2 * 1000 + 0$

**B. DOĞAL SAYILARDA BÖLME, BÖLÜNEBİLME**

**Doğal Sayılarda Bölme:**

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & c \\ \hline & d \end{array} \quad \begin{array}{l} a: \text{Bölünen} \\ b: \text{Bölen} \\ c: \text{Bölüm} \\ d: \text{Kalan} \end{array}$$

\*  $a = b * c + d$  ( $d < b$ ) olmak zorunda.

\*  $d < c \Rightarrow a = c * b + d$  (Bölen ile bölüm yer değişebilir)

\* n basamaklı "abc...m" sayısı iki basamaklı "xy", tek basamaklı "z" sayısına bölündüğünde bölüm basamak sayısı:

$\Rightarrow ab \geq xy \Rightarrow$  **Bölüm:** n - 1 basamaklı.

$\Rightarrow ab < xy \Rightarrow$  **Bölüm:** n - 2 basamaklı.

$\Rightarrow a \geq z \Rightarrow$  **Bölüm:** n basamaklı.

$\Rightarrow a < z \Rightarrow$  **Bölüm:** n - 1 basamaklı.

**Örnek:**  $\frac{8909}{7} = 1272 * 7 + 5 \Leftrightarrow 8 \geq 7 \Rightarrow$  bölüm 4 basamak.

\* a sayısının n ile bölümünden kalan x,

b sayısının n ile bölümünden kalan y ise;

$\Rightarrow a + b, n$  ile bölümünden kalan  $x + y$ ,

$\Rightarrow a - b, n$  ile bölümünden kalan  $x - y$ ,

$\Rightarrow a * b, n$  ile bölümünden kalan  $x * y$ ,

$\Rightarrow a^2, n$  ile bölümünden kalan  $x^2$ .

**Örnek:** a sayısı 7 ile bölümden kalan 4 ise;  $a^2 + 3 * a - 2$  sayının 7 ile bölümden kalan kaçtır?

$a^2 + 3 * a - 2 = 4^2 + 3 * 4 - 2 = 26$

$26 = 7 * 3 + 5 \Rightarrow$  Kalan = 5.

**Bölünebilme Kuralları:**

|               |  |
|---------------|--|
| <b>2 ile</b>  | Birler basamağı çift sayı olmalıdır. $abc \Rightarrow c = \text{Çift}$   |
| <b>3 ile</b>  | Sayı abc $\Rightarrow a + b + c = 3 * k$ olmalıdır.  |
| <b>4 ile</b>  | Sayı abc $\Rightarrow bc = 10 * b + c = 4 * k$ olmalıdır. {00, 32, vb}   |
| <b>5 ile</b>  | Birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır.  |
| <b>7 ile</b>  | $a b c d e f = 1 * f + 3 * e + 2 * d - (1 * c + 3 * b + 2 * a)$<br>$(2 \ 3 \ 1) (2 \ 3 \ 1)$<br>$(- \ - \ -) (+ \ + \ +)$<br>Çıkan değer "0" veya $7 * k$ olmalıdır. |
| <b>8 ile</b>  | Sayı abcd $\Rightarrow bcd = 100 * b + 10 * c + d = 8 * k$ olmalıdır.  |
| <b>9 ile</b>  | Sayı abc $\Rightarrow a + b + c = 9 * k$ olmalıdır.  |
| <b>10 ile</b> | Birler basamağı "0" olmalıdır.   |
| <b>11 ile</b> | $a b c d e = (e + c + a) - (b + d) = 11 * k$<br>$+ \ - \ + \ - \ +$<br>Çıkan değer "0" veya $11 * k$ olmalıdır.  |

\* Diğer sayılarda bölünme şartı, aralarında asal sayılara bölünmesidir:

$\Rightarrow$  25 ile bölünebilme: Son iki basamak 00 veya  $25 * k$ .

$\Rightarrow$  36 ile bölünebilme: Aralarındaki asal çarpanları "4" ve "9" a bölünebilmeli.

$\Rightarrow$  30 ile bölünebilme: Aralarındaki asal çarpanları "3" ve "10" a bölünebilmeli.

\*  $0 \leq a \leq x$  aralıkta b ile bölünen, c'ye bölünmeyen sayılar:

$\Rightarrow x = b * k + m$

$\Rightarrow$  Okek (b, c) = d

$\Rightarrow x = d * p + r \Rightarrow x = k - p$  tane c'ye bölünmez.

- \*  $0 \leq a \leq x$  aralıkta b veya c ile bölünen sayılar:
  - $x = b * k + m$
  - $x = c * p + n$
  - Okek  $(b, c) = d \Rightarrow x = d * t + r$
  - $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \Rightarrow z = k + p - t$

- \*  $a < x < b$  aralıkta d ile bölünen sayılar:
  - $b = d * k + m$
  - $a = f * p + n$
  - Bölünen sayı =  $k - p$

### C. ASAL ÇARPANLARA AYIRMA – EKOK – EBOB

#### Asal Çarpanlara Ayırma:

\*  $A = a^x * b^y * c^z$ ;  $x, y, z \in Z^+$ ;  $a, b, c \in$  Asal sayılar;

☛ Pozitif Bölenler Sayısı = P.B.S. :

$$P.B.S. = (x+1) * (y+1) * (z+1)$$

☛ Negatif Bölenler Sayısı = N.B.S. :

$$N.B.S. = (x+1) * (y+1) * (z+1) = P.B.S.$$

☛ Tam Bölenler Sayısı = T.B.S. :

$$T.B.S. = 2 * P.B.S. = 2 * (x+1) * (y+1) * (z+1)$$

☛ Pozitif Bölenlerin Çarpımı =  $A_x$  :

$$A_x = A^{\binom{P.B.S.}{2}} = A^{\binom{(x+1)*(y+1)*(z+1)}{2}}$$

☛ Pozitif Bölenlerin Toplamı = P.B.T. :

$$P.B.T. = \left( \frac{a^{x+1} - 1}{a - 1} \right) * \left( \frac{b^{y+1} - 1}{b - 1} \right) * \left( \frac{c^{z+1} - 1}{c - 1} \right)$$

$$P.B.T. = (a^0 + a^1 + \dots + a^x) * (b^0 + \dots + b^y) * (c^0 + \dots + c^z)$$

☛ Pozitif Tam Bölenler = P.B. :

$$P.B. = \{1, a, b, c, a * b, a * c, a^2, \dots, a^x * b^y * c^z\}$$

☛ Negatif Tam Bölenler = N.B. :

$$N.B. = \{-1, -a, -b, -c, -a * b, -a^2, \dots, -a^x * b^y * c^z\}$$

**Örnek:** 8 sayısının P.B. ve N.B. değerleri nedir?

$$P.B. = \{1, 2, 4, 8\} = 4 \text{ tane}$$

$$N.B. = \{-1, -2, -4, -8\} = 4 \text{ tane}$$

☛ Tam Bölenler = T.B. :

$$T.B. = \{N.B., P.B.\}$$

☛ Asal Olmayan Pozitif Bölen Sayısı =  $P_x A_x$  :

$$P_x A_x = P.B.S. - \{a, b, c\} = P.B.S. - 3$$

\*  $A! = b^a \Rightarrow$  a tane b çarpanda;

b değeri asal ise  $A/b$  işlemi defalarca yapılır ve kalan değerler toplanarak bölen sayısı bulunur. Eğer b değeri asal değilse aralarında asal çarpanlarından büyük olanı seçilerek aynı işlem yapılır. (Örneğin;  $6 = 2 * 3$  ise 3 alınır, bölünür.)

$$\begin{array}{r} A \overline{) b} \\ \underline{x1} \phantom{b} \\ k1 \phantom{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{A} \overline{) b} \\ \underline{x2} \phantom{b} \\ k2 \phantom{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{A} \phantom{) b} \\ \underline{x3} \\ k3 \end{array}$$

$k3 < b$

$a = x1 + x2 + x3$

$b \text{ asal ise}$

**Eğer b asal değilse:**

$b = b1 * b2, \quad b1 < b2$   
 $(b1, b2 \text{ aralarında asal})$   
 $b = b2 \text{ alınır ve aynı işlem tekrar yapılır.}$

#### EBOB – EKOK:

\* **EBOB:** İki veya daha fazla sayıyı aynı anda bölen pozitif bölenlerin en büyüğüdür.

\* **EKOK:** İki veya daha fazla sayının tam katı olan sayılardan en küçüğüdür.

| a | b | c |      |
|---|---|---|------|
| d | b | c | k1   |
| f | g | h | k2 * |
| i | k | m | k3 * |
| i | n | m | k4   |

EBOB (a, b, c) =  $k2 * k3$   
 EKOK (a, b, c) =  $k1 * k2 * k3 * k4$

$$\left. \begin{array}{l} A = a^{2x} * b^y * c^{3z} \\ B = a^x * b^{4y} * c^{2z} \\ C = a^{2x} * b^{3y} * c^z * d \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} EBOB(A, B, C) = a^x * b^y * c^z \\ EKOK(A, B, C) = a^{2x} * b^{4y} * c^{3z} * d \end{array}$$

\*  $A < B$  ise;

$$EBOB(A, B) \leq A < B \leq EKOK(A, B)$$

$$A * B = EBOB(A, B) * EKOK(A, B) \quad (a \text{ ve } b \text{ aralarında alsalsa})$$

$$A \text{ ve } B \text{ değerleri asal ise; } EBOB(A, B) = 1,$$

$$EKOK(A, B) = A * B \text{ ise;}$$

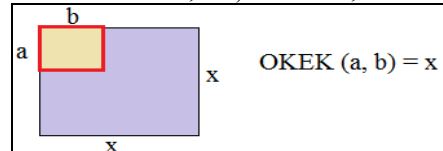
$$\checkmark A + B \text{ toplamının en büyük değeri } A * B + 1$$

(alsalsa),

$\checkmark A + B$  toplamının en büyük değeri  $EBOB(A, B) + EKOK(A, B)$  olur.

\* **Problem sorularında EKOK kullanılan yerler:**

1. Parçadan bütüne gidilen (dikdörtgenden kare, kutulardan koli elde etme, vb.) sorularda,



2. Kalanlar eşit olan sorularda katsayıyı bulmada,  $A = 4x + 3 = 5y + 3 \Rightarrow EKOK(4,5) = A - 3$  gibi.

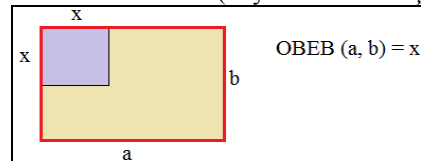
3. Bölenle kalan arasındaki fark eşitse,  $A = 4x + 3 = 5y + 4 \Rightarrow A + 1 = 4 * (x + 1) = 5 * (y + 1) \Rightarrow A + 1 = EKOK(4,5)$

4. Tur bindirme (çark, dişli, vb.) sorularında,

5. Buluşma (araçların aynı anda) sorularda kullanılır.

\* **Problem sorularında EBOB kullanılan yerler:**

1. Bütünü parçalayan, büyük parçalardan oluşacak eşit boyutlarda olan sorularda (büyük koliden küçük kutu bul),



2. Tarlada, alanda ağaç dikme sorularda,

3. En az sayıda gerekebilecek eleman sayısı sorularda.

\*  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{R}$  olmak üzere bu iki sayının OBEB ve OKEK'i;

$$\text{OKEK} \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) = \frac{\text{OKEK}(a, c)}{\text{OBEB}(b, d)}$$

$$\text{OBEB} \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) = \frac{\text{OBEB}(a * d, b * c)}{\text{OKEK}(b, d)}$$

\*  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{OKEK} \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right) = \frac{\text{OKEK}(a, c, e)}{\text{OBEB}(b, d, f)}$

**Örnek:**  $a*b*c$  ölçülerine sahip kutulardan kutu elde etmek için gereken miktar?

EKOK(a,b,c) = d  $\Rightarrow$  Kutu =  $\frac{d*d*d}{a*b*c}$

**Örnek:**  $a*b*c$  ölçülerindeki odaya en az kaç kutu girer?

EBOB(a,b,c) = d  $\Rightarrow$  Kutu =  $\frac{a*b*c}{d*d*d}$

**Örnek:**  $a*b$  alanında tarlaya en az ağaç dikmek:

EBOB(a, b) = c  $\Rightarrow$   $\left. \begin{array}{l} a = c * x + k1 \\ b = c * y + k2 \end{array} \right\}$  ise;

\* Köşelere dikilmese:  $2 * (k1 + k2)$  tane ağaç.

\* Köşeler + tarla içine:  $2 * (k1 + 1 + k2 + 1)$  tane ağaç.

\* Ağaç Sayısı =  $2 * \frac{a+b}{c}$  (Köşeler dâhilse)

**Örnek:** a, b, c sürelerinde çalan zilin ilk çaldıktan ikinci çalışa kadar geçen süre:

EKOK(a, b, c) = k  $\Rightarrow$  Birlikte ilk çalış k zamandır.

**Örnek:** Traktör soru: Ön tekerlek çevre A br, arka tekerlek çevre B br, traktör harekete başladıktan sonra ilk konuma geldiğinde ön tekerlek arka tekerlekten kaç fazla tur atmış?

EKOK(A, B) = C br (Alınan yol)  
 $\left. \begin{array}{l} C = A * X \\ C = B * Y \end{array} \right\} \Rightarrow Z = X - Y$  tur fazla atmıştır.

### D. RASYONEL SAYILAR

#### Rasyonel Sayılar:

\* Basit kesir:  $\frac{a}{b} \Leftrightarrow a < b; b \neq 0$

\* Bileşik kesir:  $\frac{a}{b} \Leftrightarrow a \geq b; b \neq 0$

\* Tam sayılı kesir:  $a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a*c + b}{c} \Leftrightarrow c \neq 0$

**Örnek:**  $-a \frac{b}{c} = -a - \frac{b}{c} = \frac{-a*c - b}{c}$

**Örnek:**  $\frac{a \frac{b}{c}}{d} = \frac{a}{d} \frac{b}{c} = \frac{a}{d} * \frac{b}{c} = \frac{a*b}{d*c} = c + \frac{d}{b}$

\*  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

\*  $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$

\*  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a * d}{b * c}$

\*  $a \frac{b}{c} \neq a * \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a*c + b}{c} \neq \frac{a*b}{c}$

\*  $\frac{\frac{a}{b} * \frac{d}{c}}{\frac{e}{f}} = \frac{a}{b} * \frac{1}{c} * \frac{d}{e} * \frac{f}{f} = \frac{a * d * f}{b * c * e}$

\*  $0, \underbrace{x \dots}_{nd} = \frac{x \dots}{10^{nd}}$  Ondalık sayı (nd: Basamak sayısı)

#### Rasyonel Sayılarda Sıralama:

\*  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

\*  $a, b, c \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

\*  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a < b < c < d \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{c}{a} < \frac{d}{a}$

\*  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a < b < c < d \Rightarrow \frac{a}{d} < \frac{a}{c} < \frac{a}{b}$

\*  $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow b, c, d \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow b < c < d \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{c}{a} > \frac{d}{a}$

\*  $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow b, c, d \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow b < c < d \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{a}{c} > \frac{a}{b}$

**Örnek:**  $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}; \frac{3}{2} < \frac{5}{2} < \frac{7}{2}$

**Örnek:**  $\frac{-1}{2} < \frac{-1}{3} < \frac{-1}{5}; \frac{-3}{2} > \frac{-5}{2} > \frac{-7}{2}$

\* Pay – payda arasındaki farkların eşit olduğu sıralama:

\*  $A = \frac{a}{a+2} \quad B = \frac{b}{b+2} \quad C = \frac{c}{c+2}$  (Payda – pay = +2)

$0 < a < b < c \Rightarrow A < B < C$  (pozitif)

$a < b < c < 0 \Rightarrow A > B > C$  (negatif)

\*  $A = \frac{a+2}{a} \quad B = \frac{b+2}{b} \quad C = \frac{c+2}{c}$  (Pay – payda = +2)

$0 < a < b < c \Rightarrow A > B > C$  (pozitif)

$a < b < c < 0 \Rightarrow A < B < C$  (negatif)

\*  $\left. \begin{array}{l} x, y, z \in \mathbb{R}^- \\ a, b, c \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x * y = a \\ x * z = b \\ y * z = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a > b > c \\ x * y > x * z > y * z \\ y < z; x < y \end{array} \right\}$

$0 < x < y < z$

\*  $a, b\overline{c}d = \frac{abcd - ab}{990}$  Devirli ondalıklı sayı  
 \*  $a, 1\overline{9} = a,2$  Devirli de tek devreden 9 ise soldan 1 artar.

**Örnek:**  $1,2464646... = 1,2\overline{46} = \frac{1246 - 12}{990} = \frac{1234}{990}$

**Örnek:**  $a = \frac{101}{103}; b = \frac{110}{112}; c = \frac{440}{442} \Rightarrow a < b < c$

**Örnek:**  $a = \frac{-101}{103}; b = \frac{-110}{112}; c = \frac{-440}{442} \Rightarrow a > b > c$

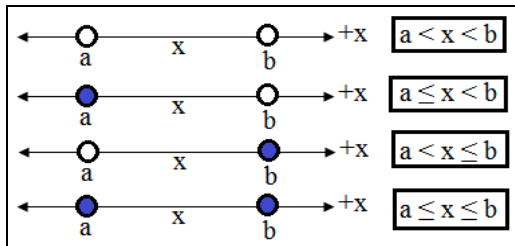
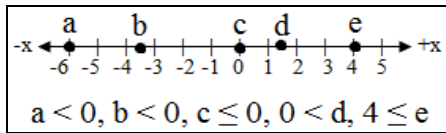
**Örnek:**  $a = \frac{103}{101}; b = \frac{112}{110}; c = \frac{442}{440} \Rightarrow a > b > c$

**Örnek:**  $a = \frac{-103}{101}; b = \frac{-112}{110}; c = \frac{-442}{440} \Rightarrow a < b < c$

\*  $y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$  ifadede x'in y cinsinden ifadesi:  
 $y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \Rightarrow x = \frac{-(d) \cdot y + b}{c \cdot y - (a)}$

**E. BASİT EŞİTSİZLİKLER VE SIRALAMA**

**Basit Eşitsizlikler:**



\*  $a < b \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$

\*  $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c \\ a : c < b : c \end{cases}$  (Pozitifte eşitsizlik değişmez.)

\*  $\begin{cases} a < b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c > b \cdot c \\ a : c > b : c \end{cases}$  (Negatifte eşitsizlik değişir.)

\*  $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$  (Taraf tarafa toplanabilir.)

\*  $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

\*  $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

\*  $\begin{cases} a < b < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^x < b^x & x \in \text{Tek} \\ a^x > b^x & x \in \text{Çift} \end{cases}$

\*  $\begin{cases} 0 < a < b \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow a^x < b^x$

\*  $a^2 < a \Rightarrow 0 < a < 1$

\*  $a^2 < |a| \Rightarrow -1 < a < 1$

\*  $a < |a| \Rightarrow a < 0$

\*  $a^3 < a \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$  veya

\*  $a^3 < a^2 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$  veya

\*  $a^X < a^Y \Rightarrow X < Y$

$a^2 \leq a \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$

$a^2 \leq |a| \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$

$a \leq |a| \Rightarrow a \leq 0$

$\frac{1}{a^X} < \frac{1}{a^Y} \Rightarrow Y < X$

\*  $a < x < b \Rightarrow x = (a, b)$

$a \leq x < b \Rightarrow x = [a, b)$

\*  $x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} a < x < b \\ c < y < d \end{cases} \Rightarrow a + c < x + y < b + d$   
 $\Rightarrow (x+y)_{\max} = b + d - 1, (x+y)_{\min} = a + c + 1$

\*  $x, y \in \mathbb{Z}^+, \begin{cases} a < x < b \\ c < y < d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = a + 1 & x_{\max} = b - 1 \\ y_{\min} = c + 1 & y_{\max} = d - 1 \end{cases}$   
 $\Rightarrow (x+y)_{\max} = b + d - 2, (x+y)_{\min} = a + c + 2$

**Örnek:**  $x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} -a < x < b \\ -c < y < d \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2)_{\max} = ?$

x ve y'nin en küçük değerleri negatif; ama karesini aldığımızda en küçük değer 0 olmalıdır.  $x^2, y^2 \geq 0$  gibi.

$\begin{cases} 0 \leq x^2 < b & b > |-a| \\ 0 \leq y^2 < d & d > |-c| \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 < b^2 + c^2$   
 $\Rightarrow (x^2 + y^2)_{\max} = b^2 + c^2 + 1$

**Örnek:**  $x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} -a < x < b \\ -c < y < d \end{cases} \Rightarrow (x \cdot y)_{\max} = ?$

En geniş aralık bulunur:

$-a \cdot d < -b \cdot c \Rightarrow -a \cdot d$  (Sol taraf için)  
 $a \cdot c < b \cdot d \Rightarrow b \cdot d$  (Sağ taraf için)  
 $\Rightarrow -a \cdot d < x \cdot y < b \cdot d \Rightarrow (x \cdot y)_{\max} = b \cdot d - 1$

**Örnek:**  $x, y \in \mathbb{Z}^+, \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ -6 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow (2x + y)_{\max} = ?$

$\begin{cases} -4 \leq 2x < 6 \\ -6 \leq y \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x)_{\max} = 6 - 1 = 5 \\ (y)_{\max} = 5 \end{cases} \Rightarrow (2x + y)_{\max} = 10$

**İkinci Dereceden Eşitsizlikler:**

\*  $\frac{(x-a)(x-b)}{c-x} \geq 0$  eşitsizliğin Ç.K. = ?

$x - a = 0 \Rightarrow x = f(x_1) = a$  (1. Kök)

$x - b = 0 \Rightarrow x = f(x_2) = b$  (2. Kök)

$c - x \neq 0 \Rightarrow x = f(x_3) \neq c$  (Payda "0" olamaz.)

| x        | $-\infty$ | a | b | c | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|---|---|-----------|
| (x-a)    | -         | + | + | + | +         |
| (x-b)    | -         | - | + | + | +         |
| (c-x)    | +         | + | + | - | -         |
| f(x) ≥ 0 | +         | - | + | - | -         |

Ç.K. =  $x = (-\infty, a] \cup [b, c)$

**F. MUTLAK DEĞER**

\*  $a \in \mathbb{R}$ , sayı doğrusu üzerinde başlangıç noktasına olan uzaklığıdır.

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{matrix} a > 0 \Rightarrow |-a| = -(-a) = a \\ a < 0 \Rightarrow |-a| = -a \end{matrix}$$

\*  $a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a| \geq 0$  olmak zorundadır.

$$a < b \Rightarrow |a - b| = \left| \begin{matrix} a - b < 0 \\ (-) \end{matrix} \right| = -(a - b) = b - a$$

$$|-x| = -(-x) = x$$

$$|x| * |y| = |x * y|$$

$$y \neq 0 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$$

$$|x^n| = |x|^n$$

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |x| = a \Rightarrow x = \pm a$$

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{matrix} |a - b| = a - b \Rightarrow a - b \geq 0 \\ |a - b| = b - a \Rightarrow a - b < 0 \end{matrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0$$

$$x, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{matrix} |x| < a \Rightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a \end{matrix}$$

$$x, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{matrix} |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a \end{matrix}$$

$$x, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow -a < |x| \leq b \Rightarrow \begin{matrix} -a < x \leq b \\ -b \leq x < a \end{matrix}$$

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| + |y| = 0 \Rightarrow |x| = 0 \vee |y| = 0$$

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{(x)^{2n}} = \sqrt{y^{2m}} \Rightarrow |x^n| = |y^m|$$

\* İki mutlak değer işleminde alınabilecek en küçük değer mutlak değerleri sıfır yapan değerlere göre çıkan sonuçtur.

**Örnek:**  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - 5| + |2x - 4|$  ifadenin alabileceği en küçük değer nedir?

$$|x - 5| = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow |5 - 5| + |2 * 5 - 4| = 6$$

$$|2x - 4| = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow |2 - 5| + |2 * 2 - 4| = 3$$

İki işleme bakıldığında en küçük değer 3'dür.

**Örnek:**  $(2x - 1)^2 \leq 25$  eşitsizliğini sağlayan  $x$  tam sayı değerleri toplamı nedir?

$$\sqrt{(2x - 1)^2} \leq \sqrt{25} \Rightarrow |2x - 1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow x = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$$

**Örnek:**  $|2x + 10| = 2x + 10$  ise  $x$ 'in değer aralığı nedir?

$$|2x + 10| = 2x + 10 \Rightarrow 2x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$$

$$\Rightarrow \text{Ç.K.} = [-5, +\infty)$$

**G. ÜSLÜ SAYILAR**

\*  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$  ise  $n$  tane  $a$  çarpımı  $a^n$  ifadesidir.

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_n$$

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a * n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_n$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^0 = 1 \vee a \neq 0 \quad (0^0 \text{ tanımsız})$$

$$n \in \mathbb{R} \Rightarrow 1^n = 1$$

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

$$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (-a^{2n}) = -a^{2n} \neq (-a)^{2n}$$

**Üslü Sayılarda İşlemler:**

$$x * a^n \pm y * a^n \mp z * a^n = (x \pm y \mp z) * a^n$$

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$a \neq 0, n \neq 0 \Rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^m * a^{-n} = a^{m-n}$$

$$b \neq 0, m \neq 0 \Rightarrow \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m*n}$$

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}$$

**Üslü sayılarda eşitlik - eşitsizlik:**

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \neq \{-1, 0, 1\} \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow m = n$$

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^n = b^n \Rightarrow \begin{cases} n = \text{çift} & a = \pm b \\ n = \text{tek} & a = b \end{cases}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow n = m = 0 \Rightarrow a^n = b^m$$

**Örnek:**  $3^{2x+y} = 5^{x-y+2} \Rightarrow x = ?, y = ?$

$$3^0 = 5^0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3}, y = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

$$a^n = 0 \Rightarrow a = 0 \vee n > 0$$

$$a^n = 0 \Rightarrow \begin{matrix} n = 0 \Rightarrow 0^0 \rightarrow \text{Tanımsız} \\ n < 0 \Rightarrow 0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \infty \rightarrow \text{Tanımsız} \end{matrix}$$

$$a^n = 1 \Rightarrow \begin{matrix} n = 0 \Rightarrow a \neq 0 \\ a = -1 \Rightarrow n = 2 * k \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a^n = b^x \\ a^m = b^y \end{matrix} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{x}{y} \quad (a \text{ ve } b \text{ aralarında asal ise})$$

$$0, xyz = xyz * 10^{-3}$$

$$\underbrace{xyz \dots ab}_{m} * 10^n \Rightarrow \text{Basamak sayısı} = m + n$$

$$* a^x < a^y \Rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow x > y \\ a > 1 \Rightarrow x < y \end{cases}$$

**Örnek:**  $4^x = 25$  ise  $x * y = ?$   
 $5^y = 8$

$$4^x = 25 \Rightarrow 2^{2x} = 5^2 \Rightarrow \sqrt{2^{2x}} = \sqrt{5^2} \Rightarrow 2^x = 5$$

$$5^y = 8 \Rightarrow 5^y = 2^3$$

$$5^y = 2^3 \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x * y = 6$$

**Örnek:**  $(a - 2)^{2a-4} = 1$  ise  $a$  değerlerinin toplamı nedir?

$$(a - 2)^{2a-4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ 2a - 4 = 0 \parallel a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2 \\ a - 2 = -1 \parallel 2a - 4 = 2k \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

İlk değerde taban 1 olursa üstü fark etmez. İkincisinde üst sıfır olursa taban sıfır olamaz. Sonucunda taban negatif olursa üstü de çift katlı bir sayı olmalıdır ki sonucu pozitif yapsın. Alınan değerlerden;  $a = 3 + 1 = 4$  olur.

**Örnek:**  $(2a - 1)^6 = (a + 4)^6$  ise  $a = ?$

$$(2a - 1)^6 = (a + 4)^6 \Rightarrow \sqrt{(2a - 1)^6} = \sqrt{(a + 4)^6} \Rightarrow$$

$$|2a - 1| \Rightarrow |a + 4| \Rightarrow 2a - 1 = \pm(a + 4) \Rightarrow a = -3 \parallel a = \frac{5}{3}$$

## H. KÖKLÜ SAYILAR

\*  $n$ , 1'den büyük  $Z^+$  olmak üzere,  $a^n = x$  denklemi sağlayan  $a$  sayısına  $x$ 'in  $n$ . dereceden kökü denir. ( $a = \sqrt[n]{x}$ )

$$* \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \quad (\text{Karekök } x)$$

$$* \sqrt[3]{k^2} \quad (\text{Küpkök } k^2)$$

$$* a = \sqrt[n]{x^n} \Rightarrow \begin{cases} a = |x| & \leftarrow n = \text{cift} \\ a = x & \leftarrow n = \text{tek} \end{cases}$$

$$* \sqrt[n]{x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \leftarrow n = \text{cift} \\ x \in \mathbb{R} & \leftarrow n = \text{tek} \end{cases}$$

$$* a = \sqrt[2n]{x} \Rightarrow x < 0 \parallel 2n = \text{cift} \Rightarrow a \notin \mathbb{R} \quad (\sqrt[4]{-2}, \sqrt[8]{-7} \text{ vb.})$$

**Örnek:**  $\sqrt{21 - 7x}$  ifadesi reel (gerçel) sayı ise  $x = ?$

$$\sqrt{21 - 7x} \in \mathbb{R} \Rightarrow 21 - 7x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3$$

$$* a = \sqrt[n]{0} = 0 \quad (n \text{ çift veya tek sayı})$$

$$* m, n \in \text{cift} \Rightarrow \sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{y} = 0 \Rightarrow x = 0 \parallel y = 0$$

$$* a = \sqrt[n]{x^m} = \left(\frac{x}{n}\right)^m \quad (\text{Üslü ifade şeklinde yazılımı})$$

|                |                 |                   |                   |
|----------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| $\sqrt{0} = 0$ | $\sqrt{16} = 4$ | $\sqrt{64} = 8$   | $\sqrt{144} = 12$ |
| $\sqrt{1} = 1$ | $\sqrt{25} = 5$ | $\sqrt{81} = 9$   | $\sqrt{169} = 13$ |
| $\sqrt{4} = 2$ | $\sqrt{36} = 6$ | $\sqrt{100} = 10$ | $\sqrt{196} = 14$ |
| $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{49} = 7$ | $\sqrt{121} = 11$ | $\sqrt{225} = 15$ |

Bazı karekökler

$$* a = \sqrt[n]{x^n * y} = x * \sqrt[n]{y} \quad (n. \text{ kökten çıkış})$$

$$* a = x * \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n * y} \quad (n. \text{ köke giriş})$$

$$* a * \sqrt{x} + b * \sqrt{x} - c * \sqrt{x} = (a + b - c) * \sqrt{x}$$

$$* \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x * y}$$

$$* (a * \sqrt[n]{x}) * (b * \sqrt[n]{y}) = a * b * \sqrt[n]{x * y}$$

$$* \sqrt[n]{x} * \sqrt[m]{y} = \sqrt[n * m]{x^m * y^n} = \sqrt[n * m]{x^m * y^n}$$

$$* \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$* k \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n * k]{x^{m * k}}$$

**Örnek:**  $x \in Z^+, a = \sqrt{x}, b = \sqrt[6]{x^2}, c = \sqrt[3]{x^{0,5}}$  ise sıralama?

Köklerin dereceleri farklı olduğundan bunların eşitlenmesi gerekir.

$$a = \sqrt{x} = 2 * \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[6]{x^3} \quad b = \sqrt[6]{x^2}$$

$$c = \sqrt[3]{x^{0,5}} = 2 * \sqrt[3]{x^{0,5 * 2}} = \sqrt[6]{x^1} = \sqrt[6]{x} \Rightarrow c < b < a$$

**Örnek:**  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{54}$  değerinin  $a$  ve  $b$  cinsinden?

$$\sqrt{54} = \sqrt{2 * 27} = \sqrt{2 * 3^3} = \sqrt{2} * \sqrt{3^3} = a * b^3$$

**Örnek:**  $\sqrt{0,36} + \sqrt{0,04} = ?$   
 $\sqrt{8,1} - \sqrt{0,1}$

$$\frac{\sqrt{0,01} * (\sqrt{36} + \sqrt{4})}{\sqrt{0,1} * (\sqrt{81} - \sqrt{1})} = \frac{\sqrt{0,01} * (6 + 2)}{\sqrt{0,1} * (9 - 1)} = \frac{\sqrt{10^{-2}} * 8}{\sqrt{10^{-1}} * 8} = \frac{\sqrt{10^{-1}}}{\sqrt{10^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$* a = \sqrt{a} * \sqrt{a} \quad (\text{Sayının eşlenik çarpımı})$$

$$* \sqrt[6]{a} * \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{a} \quad (\text{Eşlenik çarpım})$$

$$* a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) * (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$* \frac{k}{a - c} = \frac{x}{\sqrt{a} - b} + \frac{y}{\sqrt{a} + b} \quad (\text{Rasyonel ifadeleri toplama})$$

$$* \frac{x}{\sqrt{a} - b} - \frac{x}{\sqrt{a} + b} = 2 \quad \frac{x}{\sqrt{a} - b} + \frac{x}{\sqrt{a} + b} = 2 * \sqrt{a}$$

**Örnek:**  $\frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = ?$

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} - \frac{2\sqrt{3} - 2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{2 * (\sqrt{3} + 1)}{2} - \frac{2 * (\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$= \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$$

\*  $x, y \in \mathbb{R}^+, x > y \Rightarrow \{x + y = a; x * y = b\}$  ise;

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{2a}{2} \pm \frac{2\sqrt{b}}{2}} = \frac{\sqrt{2a \pm 2\sqrt{b}}}{\sqrt{2}}$$

**Örnek:**  $\sqrt{8} + \sqrt{60} = \sqrt{8} + \sqrt{4 * 15} = \sqrt{\frac{8}{\{3+5\}} + \frac{2\sqrt{15}}{\{3*5\}}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$



$$* \sqrt[m]{y} * \sqrt[n]{x} = \sqrt[m*n]{x^m * y^n}$$

$$* \sqrt[m]{y} * \sqrt[n]{x} = y^{\left(\frac{1}{m}\right)} * x^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$* \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \neq \sqrt[n]{x+y}$$

$$* \sqrt{x} * \sqrt{x} * \sqrt{x} * \dots = y \Rightarrow \sqrt[x * \sqrt{x} * \sqrt{x} * \dots]{y} = \sqrt{x * y}$$

$$* x = a * (a+1) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = a+1 \\ \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \dots}}} = a \\ \sqrt[n]{x * \sqrt[n]{x * \sqrt[n]{x * \dots}}} = \sqrt[n]{x} \\ \sqrt[n]{x : \sqrt[n]{x : \sqrt[n]{x : \dots}}} = \sqrt[n]{x} \end{cases}$$

**Örnek:**  $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \dots}}} = 8 \Rightarrow x = ?$   
 $x = a * (a+1) = 8 * 9 = 72$  (Çıkarmada küçük değer alınır.)

**Örnek:**  $x = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} = ?$   
 $x = a * (a+1) = 20 = 4 * 5$  (+ olduğundan en büyüğü olan 5)

**Örnek:**  $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{27 - \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = ?$   
 $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{27 - \sqrt{1 + \sqrt{9}}}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{27 - \sqrt{1 + 3}}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt{27 - 2}}$   
 $= \sqrt[3]{3 + \sqrt{25}} = \sqrt[3]{3 + 5} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

**I. ÇARPANLARA AYIRMA VE SADELEŞTİRME**

$$* a^2 - b^2 = (a - b) * (a + b) \quad (\text{İki kare farkı})$$

$$* a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2 * a * b = (a + b)^2 - 2 * a * b$$

$$* (a - b)^2 = a^2 - 2 * a * b + b^2 \quad (\text{Tam kare})$$

$$* (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4 * a * b \quad (\text{Tam kare})$$

$$* (a + b)^2 = a^2 + 2 * a * b + b^2 \quad (\text{Tam kare})$$

$$* (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4 * a * b \quad (\text{Tam kare})$$

$$* (a - b)^3 = a^3 - 3 * a^2 * b + 3 * a * b^2 - b^3 \quad (\text{Küplü ifade})$$

$$* (a + b)^3 = a^3 + 3 * a^2 * b + 3 * a * b^2 + b^3 \quad (\text{Küplü ifade})$$

$$* a^3 - b^3 = (a - b) * (a^2 + a * b + b^2) \quad (\text{İki küp farkı})$$

$$* a^3 + b^3 = (a + b) * (a^2 - a * b + b^2) \quad (\text{İki küp toplamı})$$

$$* a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3 * a * b * (a + b) \quad (\text{İki küp toplamı})$$

$$* (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 * (a * b + a * c + b * c)$$

$$* (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 * (a * b - a * c - b * c)$$

$$* (a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 * (b * c - a * b - a * c)$$

$$* a - b = -(b - a) \quad (\text{İşaret değiştirme})$$

$$* a * x + b * x - c * x = (a + b - c) * x \quad (\text{Ortak parantez})$$

$$* (a - b)^n \Rightarrow \begin{cases} n = \text{çift} \Rightarrow (a - b)^n = (b - a)^n \\ n = \text{tek} \Rightarrow (a - b)^n = -(b - a)^n \end{cases}$$

$$* y = x^2 + a * x + b \pm c \Rightarrow \frac{a}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = b \Rightarrow y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \pm c$$

$$* x^2 + b * x + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = m + n \\ c = m * n \end{cases} \Rightarrow (x + m) * (x + n) = 0$$

$$* \begin{matrix} a * x^2 + b * x + c = 0 \\ d * x \\ e * x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a * x^2 = d * x * e * x \\ c = f * g \end{matrix} \Rightarrow (d * x + f) * (e * x + g) = 0$$

**Örnek:**  $\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - x - 2}$  ifadesinin sadeleştiriniz.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3) * (x + 2)$$

$$\begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \begin{matrix} -3 \\ +2 \end{matrix}$$

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (2x - 1) * (x + 2)$$

$$\begin{matrix} 2x \\ x \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ +2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - x - 2} = \frac{(x - 3) * (x + 2)}{(2x - 1) * (x + 2)} = \frac{(x - 3)}{(2x - 1)}$$

**Örnek:**  $x^2 = x + 1$  ise  $x^5 + x^4 = ?$

$$x^5 + x^4 = x^4 * (x + 1) = (x^2)^2 * (x + 1) = (x + 1)^2 * (x + 1)$$

$$x^5 + x^4 = (x^2 + 2 * x + 1) * (x + 1) = (x + 1 + 2 * x + 1) * (x + 1)$$

$$x^5 + x^4 = (3 * x + 2) * (x + 1) = 3 * x^2 + 5 * x + 2$$

$$x^5 + x^4 = 3 * (x + 1) + 5 * x + 2 = 8 * x + 5$$

**J. ORAN - ORANTI**

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = b * c \quad (\text{k orantı sabiti})$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{matrix} a = b * k \\ c = d * k \end{matrix}$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d} = k$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{m * a + n * c}{m * b + n * d} = \frac{m * a - n * c}{m * b - n * d} = k$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a * c}{b * d} = k^2$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a * d}{b * c} = \frac{a : c}{b : d} = 1$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = k^n$$

$$* \frac{a * c}{b} = k \Rightarrow (b, c \text{ veya } a \text{ ile doğru; } a, c \text{ ile ters orantılı})$$

$$* a * c = k \Rightarrow a = \frac{k}{c} \quad (\text{T.O.}) \quad \frac{c}{b} = k \Rightarrow c = k * b \quad (\text{D.O.})$$

\* a, b'nin aritmetik, geometrik, harmonik ortalamaları:

$$\text{A.O.} = \frac{a + b}{2} \quad \text{G.O.} = \sqrt{a * b} \quad \text{H.O.} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2 * a * b}{a + b}$$

\* a, b, c'nin aritmetik, geometrik, harmonik ortalamaları:

$$\text{A.O.} = \frac{a + b + c}{3} \quad \text{G.O.} = \sqrt[3]{a * b * c} \quad \text{H.O.} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{(G.O.)^2}{\text{A.O.}}$$

\* a, b, c sırayla x, y, z ile orantılı ise;

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \Leftrightarrow a : b : c = x : y : z$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} a = c * x \\ b = d * x \end{cases} \quad (\text{Doğru orantıda})$$

$$* a * c = b * d \Rightarrow \begin{cases} c = b * x \\ d = a * x \end{cases} \quad (\text{Ters orantıda})$$

Bileşik orantılı problemlerde çözüm yöntemi

$$* \frac{\text{Birinci İş Miktarı}}{\text{İkinci İş Miktarı}} = \frac{\text{Birinciyle İlgili Verilerin Çarpımı}}{\text{İkinciyle İlgili Verilerin Çarpımı}}$$

**Örnek:**  $a, b \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 4 * a = 7 * b \Rightarrow a - b = ?$

$$4 * a = 7 * b \Rightarrow a = 7 * k, b = 4 * k \Rightarrow a - b = 3 * k$$

**Örnek:** a, b, c'den oluşan toplulukta 48 kişi var. Bu toplulukta sayıları sırayla 3, 4 ve 5 ile orantılı ise a grubunda kişi sayısı?

$$a + b + c = 48 \Rightarrow a = 3k, b = 4k, c = 5k$$

$$3k + 4k + 5k = 48 \Rightarrow 12 * k = 48 \Rightarrow k = 2$$

$$a = 3k = 3 * 2 = 6 \text{ kişi}$$

**Örnek:** 3 işçi bir günde 48 tane paket hazırlarsa aynı güçteki 5 işçi 1 günde kaç paket yapar?

$$\begin{array}{l} 3 \text{ işçi} \quad \frac{D.O.48}{X} \text{ paket} \\ 5 \text{ işçi} \quad x \text{ paket} \end{array} \Rightarrow x = \frac{5 * 48}{3} = 80 \text{ paket}$$

**Örnek:** a, b ile ters, c ile doğru orantılıdır. a = 6, b = 10 iken c = 15 ise a = 8, c = 6 iken b = ?

$$\frac{a * b}{c} = k \Rightarrow \frac{6 * 10}{15} = \frac{8 * b}{6} \Rightarrow b = \frac{6 * 10 * 6}{15 * 8} = 3$$

**Örnek:** 4 tane işçi, günde 5 saat çalışarak bir işi 6 günde bitirirse; aynı işin iki katını 3 işçi günde 8 saat çalışarak kaç günde bitirir?

$$\frac{k}{2 * k} = \frac{4 * 5 * 6}{3 * 8 * x} \Rightarrow x = 10 \text{ gün}$$

|                  |  |
|------------------|--|
| * Not Ortalama = | $\frac{\text{Notların Toplamı}}{\text{Notların Ortalama}}$ |
| * Yas Ortalama = | $\frac{\text{Yasların Toplamı}}{\text{Kisi Sayısı}}$       |

**Örnek:** Grupta 15 erkek, 12 kız var. Erkeklerin yaş ortalaması 27, kızların da 18'dir. Grubun yaş ortalaması = ?

$$\frac{E}{15} = 27 \Rightarrow E = 405 \text{ kişi} \quad \frac{K}{12} = 18 \Rightarrow K = 216 \text{ kişi}$$

$$G.Y.O. = \frac{E + K}{15 + 12} = \frac{405 + 216}{15 + 12} = \frac{621}{27} = 23$$

**Örnek:** 40 ve 60 sayılarının harmonik ve geometrik ort. = ?

$$H.O. = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2 * 40 * 60}{40 + 60} = 48$$

$$G.O. = \sqrt{a * b} = \sqrt{40 * 60} = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6} = 48,98$$

## K. DENKLEM ÇÖZME

### Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem:

$$* a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow a * x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \Rightarrow \text{Ç.K.} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

$$* a, b \in \mathbb{R}, a = 0, b = 0 \Rightarrow a * x + b = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \mathbb{R}$$

$$* a, b \in \mathbb{R}, a = 0, b \neq 0 \Rightarrow a * x + b = 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \text{Ç.K.} = \{ \} = \emptyset$$

### Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem:

$$* a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a * x + b * y + c = 0$$

$$* \begin{cases} a * x + b * y + c = 0 \\ d * x + e * y + f = 0 \end{cases} \text{ iki bilinmeyenli iki denklem ise;}$$

$$\neq \frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \Rightarrow \text{Ç.K.} = \{x, y\} \quad \text{Tek bir sıralı ikili}$$

$$\neq \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \Rightarrow \text{Ç.K.} = \mathbb{R} \quad \text{Sonsuz sıralı ikili}$$

$$\neq \frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f} \Rightarrow \text{Ç.K.} = \emptyset \quad \text{Boş küme}$$

**Örnek:**  $\begin{cases} 3 * x + 2 * y = 38 \\ 5 * x - 3 * y = 26 \end{cases} \Rightarrow x + y = ?$

\* **Yok etme yöntemi ile bulma:**

$$\begin{cases} 3/3 * x + 2 * y = 38 \\ 2/5 * x - 3 * y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 * x + 6 * y = 114 \\ 10 * x - 6 * y = 52 \end{cases} \Rightarrow 19 * x = 166$$

$$x = \frac{166}{19} = 8,73, \quad y = \frac{38 - 3 * x}{2} = \frac{38 - 3 * 8,73}{2} = 5,89$$

$$x + y = 8,73 + 5,89 = 14,62$$

\* **Yerine koyma yöntemi ile bulma:**

$$3 * x + 2 * y = 38 \Rightarrow y = \frac{38 - 3 * x}{2}$$

$$5 * x - 3 * y = 26 \Rightarrow 5 * x - 3 * \left( \frac{38 - 3 * x}{2} \right) = 26 \Rightarrow$$

$$\frac{10 * x - 114 + 9 * x}{2} = 26 \Rightarrow 19 * x = 166 \Rightarrow x = 8,73$$

Sonra x görülen yerine konarak y bulunur.

\* **Karşılaştırma yöntemi ile bulma:**

$$3 * x + 2 * y = 38 \Rightarrow y = \frac{38 - 3 * x}{2}$$

$$5 * x - 3 * y = 26 \Rightarrow y = \frac{5 * x - 26}{3}$$

$$\frac{38 - 3 * x}{2} = \frac{5 * x - 26}{3} \Rightarrow x = 8,73$$

Sonra x görülen yerine konarak y bulunur.

### n. Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem:

$$* a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + \dots + a_1 * x^1 + a_0 = 0$$

## L. SAYI, KESİR, YAŞ, HAREKET PROBLEMLERİ

### Sayı Problemleri:

$$* \frac{x+3}{3} \text{ Bir sayının üç fazlası}$$

$$* \frac{3 * x}{5} \text{ Bir sayının üç katı}$$

$$* \frac{5 * (x+2)}{4} \text{ Bir sayının iki fazlasının beş katı}$$

$$* \frac{4 * x - 1}{x^2 - 2} \text{ Bir sayının dört katının bir eksiği}$$

$$* \frac{x^2 - 2}{(x-3)^2} \text{ Bir sayının karesinin iki eksiği}$$

$$* \frac{(x-3)^2}{x = 3y + 5} \text{ Bir sayının üç eksiğinin karesi}$$

$$* x = 3y + 5 \text{ Bir sayı, diğer sayının üç katının beş fazlası}$$

**Örnek:** Bir sınıfta kitap almak isteyen öğrenciler kendi aralarında, 250'er lira topladıklarında 500 lira eksik, 300'er lira topladıklarında 500'er lira fazla paraları oluyor. Sınıf=?

$$T = 250 * x + 500 = 300 * x - 500$$

$$\Rightarrow 50 * x = 1000 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow \text{Sınıf mevcudu} = 20 \text{ kişi.}$$

**Örnek:** Bir sınıftaki öğrenciler sıralara 2'şerli oturduklarında 6 öğrenci ayakta kalıyor, 3'erli oturunca 2 sıra boş kalıyor. Sınıfta kaç öğrenci var?

$$T = 2 * x + 6 = 3 * (x - 2)$$

$$\Rightarrow 2 * x + 6 = 3 * x - 6 \Rightarrow x = 12 \text{ (sıra sayısı)}$$

$$T = 2 * x + 6 = 2 * 12 + 6 = 30 \text{ (öğrenci sayısı)}$$

**Örnek:** Bir merdivenin basamaklarını ikişer ikişer çıkıp dörder dörder inen Erdal, çıkarken attığı adım sayısı, inerken attığı adım sayısından 7 fazla ise merdiven kaç basamaklıdır?

$$T = 2 * x = 4 * (x - 7)$$

$$\Rightarrow 2 * x = 4 * (x - 7) \Rightarrow 2 * x = 4 * x - 28 \Rightarrow x = 14$$

$$\Rightarrow T = 2 * x = 2 * 14 = 28 \text{ (merdiven sayısı)}$$

**Örnek:** Bir kırtasiyede 8 defter ile 5 kalemin fiyatı 35,5 €, bir kırtasiyede 3 defter fiyatı ile 7 kalem alınabilirse bir defter fiyatı kaç € = ?

$$8 * D + 5 * K = 35,5 \quad 3 * D = 7 * K \Rightarrow D = 7 * K, K = 3 * K$$

$$8 * 7k + 5 * 3k = 35,5 \Rightarrow 71 * k = 35,5 \Rightarrow k = 0,5$$

$$D = 7 * k = 7 * 0,5 = 3,5 \text{ €}$$

**Örnek:** Bir yolda 4 adım ileri, 1 adım geri adım atarak yürüyen bir kişi toplam 172 adım attı. Baştan kaç adım ilerler?

$$4 \text{ adım } (\Rightarrow), 1 \text{ adım geri } (\Leftarrow) \text{ iken } 4 + 1 = 5 \text{ adım}$$

$$172 = 5 * 34 + 2 \Rightarrow 172 \text{ adımda } 34 \text{ kere } 5 \text{ adım işlendi, kalan iki adım da } 2 \text{ adım ileri gidecek.}$$

$$\text{İlerlemede net adım hareket } 4 - 1 = 3 \text{ adım (net ilerleme)}$$

$$34 * 3 = 102 \text{ adım } \Rightarrow \text{Son iki hareket öncesindeki durum}$$

$$\text{Toplam adım} = 102 + 2 = 104 \text{ adım.}$$

**Örnek:** 155 litrelik havuz, 5 ve 8 litrelik iki bidonla su taşıyarak doldurulacak. Bu iki bidonla toplam 25 defa su taşınırsa 5 litrelik bidonla kaç defa su taşınır?

$$5 \text{ litre } \Rightarrow x \text{ defa; } 8 \text{ litre } \Rightarrow (25 - x) \text{ defa su taşınır.}$$

$$5 * x + 8 * (25 - x) = 155 \Rightarrow x = 15 \text{ defa su taşınır.}$$

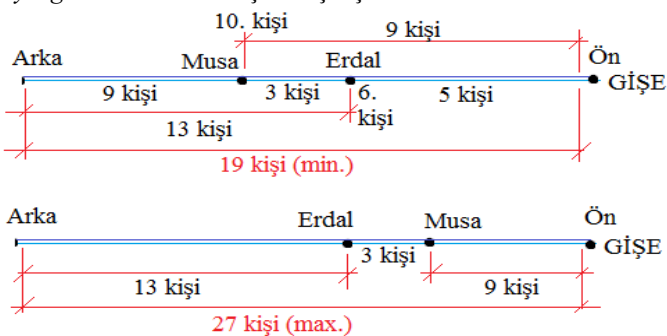
**Örnek:** Musa, kuyrukta baştan (n-2). sırada, sondan (3n+1). sıradadır. Kuyrukta 34 kişi varsa kaçinci sıradadır?

$$\text{Kisi} = \text{Onde} + \text{Arkada} - 1 \quad (x. \text{ sırada olduğu için})$$

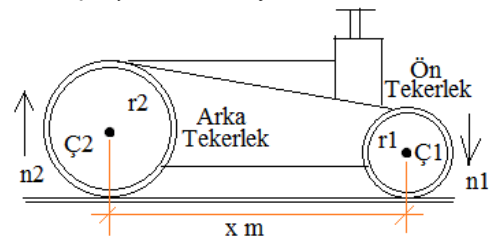
$$34 = n - 2 + 3 * n + 1 - 1 \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow n = 9$$

$$(n - 2) = (9 - 2) = 7. \text{ sıra} \quad (\text{önden itibaren sırası})$$

**Örnek:** Musa, sırada baştan 10. sırada, Erdal ise sondan 14. sıradadır. Musa ile Erdal arasında 3 kişi varsa sıra kuyruğunda en az ve en çok kaç kişi olabilir?



**Örnek:** Bir traktörün ön tekerleğinin çevresi 1,8 m, arka tekerleğinin çevresi 3,6 m'dir. Ön tekerleğin dönüş sayısı arka tekerleğin dönüş sayısından 100 fazla ise ilerleme mesafesi?



$$\text{Ön tekerlek } \Rightarrow C1 = 1,8 \text{ m. (} r1 \text{ yarıçaplı, } n1 \text{ dönüşü)}$$

$$\text{Arka tekerlek } \Rightarrow C2 = 3,6 \text{ m. (} r2 \text{ yarıçaplı, } n2 \text{ dönüşü)}$$

$$\text{Ön tekerleğin dönüş sayısı, arka tekerleğinin 2 katıdır.}$$

$$n1 = 2 * n2 \Rightarrow 2 * n2 = n2 + 100 \Rightarrow n2 = 100 \text{ devir}$$

$$\text{Traktörün aldığı yol:}$$

$$x = C2 * n2 = 3,6 * 100 = 360 \text{ m.}$$

**Kesir Problemleri:**

- \*  $\frac{x}{2}$  Bir sayının yarısı
- \*  $\frac{x}{3}$  Bir sayının üçte biri
- \*  $\frac{2 * x}{5}$  Bir sayının beşte ikisi veya  $2 / 5$ 'i,
- \*  $\frac{x + 3}{2}$  Bir sayının üç fazlasının yarısı

**Örnek:** Bir kesrin değeri  $3 / 5$ 'tir. Bu kesrin payına 1 eklenir, paydasından 1 çıkarılırsa kesrin değeri  $2 / 3$ 'tür. Başlangıçtaki kesrin payı nedir?

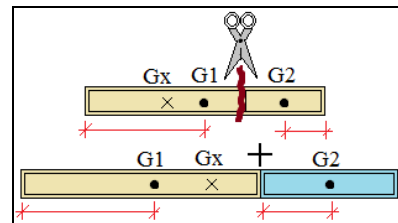
$$\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3 * x + 1}{5 * x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 9 * x + 3 = 10 * x - 2 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{Başlangıçtaki kesrin payı} = 3 * x = 3 * 5 = 15$$

**Örnek:** Bir kabın ağırlığı boş iken a gr, üçte biri suyla dolarken b gr ise kabın tamamı su dolsa ağırlığı kaç gr=? Kabın alabileceği su miktarı 3V olsun.

$$\left. \begin{array}{l} V + a = b \\ 3 * V + a = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 * V + 3 * a = 3 * b \\ -3 * V - a = -x \end{array} \right\} \Rightarrow 2 * a = 3 * b - x$$

$$\Rightarrow x = 3 * b - 2 * a \text{ gr.}$$



\* Bir telin herhangi bir ucundan tel kesiliyorsa kesilen parçanın yarısı kadar ve ters yönde; bir ucuna tel ekleniyorsa eklenen parçanın yarısı kadar ve aynı yönde telin orta noktası değişir. (G1  $\Rightarrow$  Gx)

**h:** Bırakılan yükseklik  
**n:** Sekme sayısı  
**Y:** n. sekmede çıkma yükseklik  
**X:** Sekme miktarı

$$Y = h * X^n$$

**Örnek:** Belirli bir yükseklikten bırakılan bir top, yere vuruşundan sonra bir önceki yüksekliğinin 3/16'sı kadar yükselir. Top yere çarpışından sonra 18 cm yükselirse birinci vuruşundan sonra kaç cm yükselir?

$$Y = h * X^n \Rightarrow 18 = h * \left(\frac{3}{16}\right)^2 \Rightarrow h = 512 \text{ cm}$$

$$\text{Birinci sekmede } Y = h * X^n = 512 * \left(\frac{3}{16}\right)^1 = 96 \text{ cm}$$

**Yaş Problemleri:**

| Durumlar                      | Elif        | Betül |
|-------------------------------|-------------|-------|
| Şimdiki yaşları               | x           | y     |
| a yıl sonraki yaşları         | x + a       | y + a |
| a yıl önceki yaşları          | x - a       | y - a |
| Şimdiki yaşları toplamı       | x + y       |       |
| k yıl sonraki yaşları toplamı | x + y + 2*k |       |
| Şimdiki yaşları farkı         | x - y       |       |
| k yıl sonraki yaşları farkı   | x - y       |       |
| Doğduğu zamanki yaşları       | 0           | 0     |
| a yıl sonra doğsa idi         | x - a       | y - a |
| a yıl önce doğsa idi          | x + a       | y + a |

\* Yaş farkı yıllara göre değişmez.

\* Sorularda “yaşında iken” ibare, yaşı büyük için, “yaşına geldiğinde” ibare, yaşı küçük olan kişi için kullanılır.

**Örnek:** Çiğdem 2 yıl önce doğsa idi yaşı a, 4 yıl sonra doğsa idi yaşı b olacaktır. Bugünkü yaşı 24 ise a + b = ?

$$a = x + k = 24 + 2 = 26 \quad (2 \text{ yıl önce doğsa})$$

$$b = x - k = 24 - 4 = 20 \quad (4 \text{ yıl sonra doğsa})$$

$$a + b = 26 + 20 = 46$$

**Örnek:** Elif, Polat'ın bugünkü yaşına geldiğinde Polat 43 yaşında olacak. Elif bugün 25 yaşında ise Polat bugün = ?

| Durumlar                        | Elif | Polat |
|---------------------------------|------|-------|
| Şimdiki yaşları                 | 25   | X     |
| Elif Polat'ın yaşına geldiğinde | X    | 43    |

$$X - 25 = 43 - X \Rightarrow X = 34 \Leftrightarrow X = \frac{43+25}{2} = 34 \text{ yaşında}$$

**Örnek:** Sedat arkadaşına “7 yıl sonraki yaşım, doğum yılımın rakamları toplamına eşit olacak.” dedi. Bu konuşma 1998'de olduğuna göre Sedat hangi yılda doğdu?

Sedat 19xy yılında doğsun.

$$1998 + 7 = 2005 \quad (7 \text{ yıl sonraki yaşı için})$$

$$2005 - 19xy = 1 + 9 + x + y \Rightarrow 11 * x + 2 * y = 95$$

$$x = 7, y = 9 \Rightarrow \text{Yıl} = 1979 \text{ (Doğduğu yılı)}$$

**Hareket Problemleri:**

$$* X = V * t$$

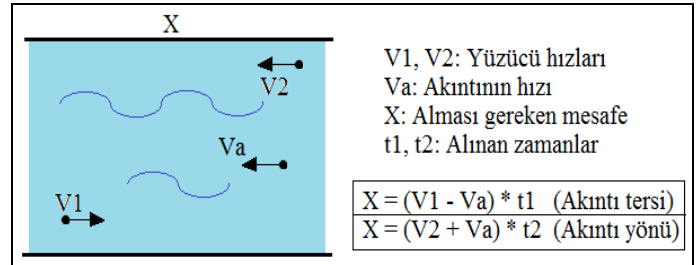
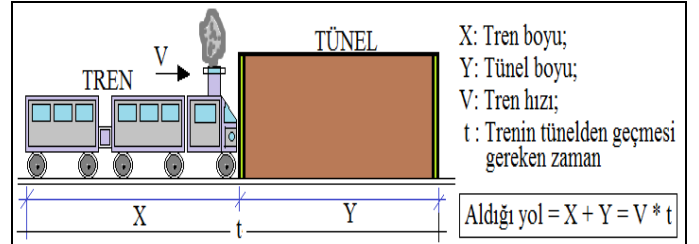
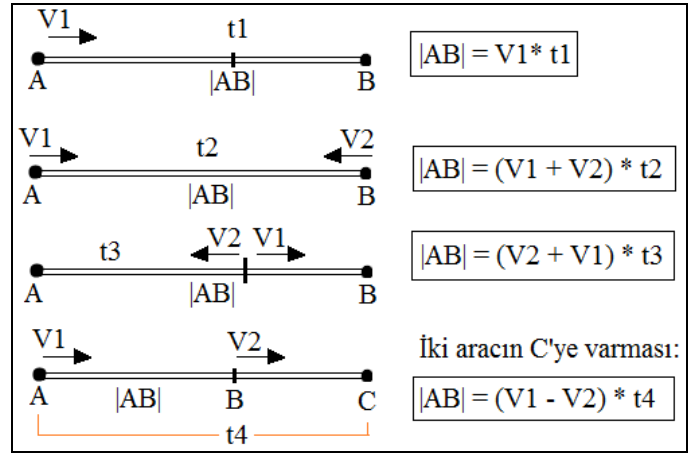
$$\text{Yol} = \text{Hız} * \text{Zaman}$$

$$* 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$* 1 \text{ saat} = 60 \text{ dakika} = 3600 \text{ saniye}$$

$$* 1 \text{ km/h} = 1 * \frac{1000}{60} \frac{\text{m}}{\text{dk}} = 1 * \frac{1000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{dönüşümlerde})$$

| Yol (x)        | Hız (V) | Zaman (t)   |
|----------------|---------|-------------|
| Kilometre (km) | km / h  | Saat (h)    |
| Metre (m)      | m / dk  | Dakika (dk) |
| Metre (m)      | m / s   | Saniye (s)  |



Uçak, vb. sorularda da mantık ayındır.

$$* \text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$$

kpsscini.com

$$* V_{\text{ort}} = \frac{X_{\text{ort}}}{t_{\text{ort}}} \Rightarrow V_{\text{ort}} = \frac{X_1 + X_2}{\frac{X_1}{V_1} + \frac{X_2}{V_2}} \quad (\text{Gidiş: } X_1, \text{ geliş: } X_2)$$

$$* V_{\text{ort}} = \frac{2 * V_1 * V_2}{V_1 + V_2} \quad (\text{Gidiş - geliş yollar eşitse})$$

**Örnek:** Bir araç, A ile B arasındaki yolu saatte 40 km ile gidip beklemeden saatte 60 km sabit hızla geri dönüyor. Bu aracın ortalama hızı nedir?

$$V_{\text{ort}} = \frac{X_{\text{ort}}}{t_{\text{ort}}} = \frac{X_1 + X_2}{\frac{X_1}{V_1} + \frac{X_2}{V_2}} = \frac{X + X}{\frac{X}{60} + \frac{X}{40}} = \frac{2 * X}{\frac{2 * X}{120} + \frac{3 * X}{120}} = \frac{2 * X}{5 * X / 120}$$

$$V_{\text{ort}} = 2 * X * \frac{120}{5 * X} = 48 \text{ km / h}$$

**Örnek:** Saatteki hızı 48 km/h olan bir tren uzunluğu 130 m, bu tren 510 m uzunluğunda bir tünele tam girerken çalıştırılan bir kronometre, tren tünelden çıktığında kaçınıcı saniyededir?

$$\text{Tren Yolu} = 130 + 510 = 640 \text{ m}$$

$$48 \text{ km / h} = 48 * 1000 / 3600 = 40 / 3 \text{ m/s}$$

$$\text{Tüneli Geçme Zamanı} = \text{Trenin Yolu} / \text{Trenin Hızı}$$

$$t = \frac{640}{40/3} = \frac{640 * 3}{40} = 48 \text{ sn} \quad (\text{Kronometre 48. sn'dedir.})$$

**M. İŞÇİ – HAVUZ PROBLEMLERİ**

**İşçi Problemleri:**

\* Ali bir işi tek başına a saatte, Burak aynı işi tek başına b saatte, her ikisi birlikte bu işi t saatte bitirsin.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t}{a} + \frac{t}{b} = 1$$

$$a > b \Rightarrow t < b < a$$

$\frac{t}{a}$  : Ali'nin bitirdiği iş miktarı

$\frac{t}{b}$  : Burak'ın bitirdiği iş miktarı

\* Çalışma hızıyla işi bitirme süresi ters orantılıdır.

$$V = \frac{a}{t}$$

\* Yapılacak iş sabitken, işçi sayısı ile işin bitiş süresi ters orantılıdır.

**Örnek:** Sinan ile Ferhat'ın birlikte 8 saatte bitirebildikleri bir işi Sinan tek başına 12 saatte bitirirse aynı işi Ferhat tek başına kaç saatte bitirir?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \Rightarrow x = 24 \text{ saatte}$$

**Örnek:** Zeynep bir işin 2/3'ünü 4 saatte, Fatma ise aynı işin 1/4'ünü 3 saatte bitiriyor. İkisi birlikte bu işi kaç saatte bitirir?

$$\frac{2*t_1}{3} = 4 \Rightarrow t_1 = 6 \text{ saat} \quad \frac{1*t_2}{4} = 3 \Rightarrow t_2 = 12 \text{ saat}$$

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 4 \text{ saat}$$

**Örnek:** Serkan'ın çalışma hızı, Musa'nın çalışma hızının 4 katıdır. Buna göre ikisi beraber 12 günde bitirdiği bir işi, Musa tek başına kaç günde bitirir?

Musa ( $V_1, t_1$ ); Serkan ( $V_2, t_2$ )

$$V_2 = 4 * V_1 \Rightarrow t_1 = 4 * t_2$$

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{4*t_2} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{5}{4*t_2} = \frac{1}{12}$$

$$t_2 = 15 \text{ gün} \Rightarrow t_1 = 4 * t_2 = 4 * 15 = 60 \text{ gün}$$

**Örnek:** Bir işi 3 usta 10 günde, 5 çırak 9 günde bitirir. 1 usta ve 1 çırak aynı işi kaç günde bitirir?

1 usta = 3 \* 10 = 30 günde bitirir.

1 çırak = 5 \* 9 = 45 günde bitirir.

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{3}{90} + \frac{2}{90} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{5}{90} = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 18 \text{ günde}$$

**Örnek:** Emre bir işi tek başına 12 saatte, Ercan ise aynı işi tek başına 16 saatte bitirir. İşe başladıktan 4 saat sonra Ercan işten ayrılıyor. Emre kalan işi tek başına kaç saatte bitirir?

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) * 4 + \frac{x}{12} = 1 \Rightarrow \frac{16+12+4x}{48} = 1 \Rightarrow x = 5 \text{ saatte}$$

**Örnek:** Fırat bir işi tek başına a saatte, Dicle ise birlikte aynı işi 4 saatte yapıyor. Fırat bu işi yalnız başına Dicle'den daha kısa sürede yaparsa a için ne denebilir?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \quad (\text{Fırat işi a saatte, Dicle b saatte yaparsa})$$

Eğer ikisi eşit sürelerde yapsa a = b = 4\*2 = 8 saatte olur. a < b olduğundan; a < 8 olur.

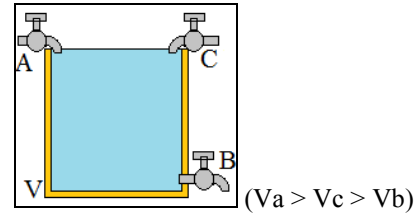
a veya b'nin 4 saatte daha az olmayacağından 4 < a ise;  $4 < a < 8$

**Havuz Problemleri:**

\* Havuzda dolduran musluk (+), boşaltan (-) ile gösterilir.

\* Havuz dolması sonuç ise; doldurma (+), boşaltma (-).

\* Havuz boşaltma sonuç ise; doldurma (-), boşaltma (+).



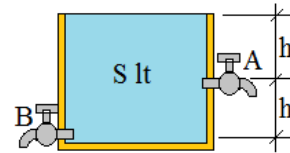
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{t} \quad (\text{C musluğu kapalı ise})$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{t} \quad (\text{B musluğu kapalı ise})$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{t} \quad (\text{Üç musluk da açıksa})$$

\* Muslukların akış hızı ile havuz dolma / boşaltma süresi ters orantılıdır. (Va ile ta arasında ters orantı var.)

**Örnek:** Şekildeki B musluğu dolu havuzu tek başına 16 saatte boşaltır. A musluğu ise dolu havuzu tek başına, kendi hızına kadar 8 saatte boşaltır. Havuz dolu iken ikisi birlikte açılırsa kaç saatte boşaltır?

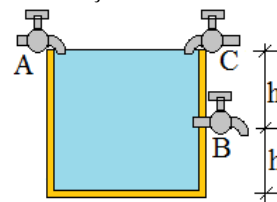


Havuzun alt yarısını B musluğu 8 saatte boşaltır. Havuzun üst yarısını A ve B muslukları beraber x saatte boşaltın.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 4 \text{ saatte boşaltır.}$$

$$\text{Havuz: } t = 4 + 8 = 12 \text{ saatte boşaltır.}$$

**Örnek:** Şekildeki havuzun üst kısmında havuzu dolduran A ve C muslukları, havuzun tam ortasında ise havuzun yarısını boşaltan B musluğu var. A musluğu boş havuzu tek başına 8 saatte, C musluğu tek başına 4 saatte doldurur. Üç musluk aynı anda açıldığında havuz 44/15 saatte dolarsa B musluğu ne kadarda havuzun yarısını boşaltır?



Havuzun yarısını A musluğu 4 saatte, C musluğu 2 saatte doldurur. Alt yarısını A ve C musluklar birlikte doldurur.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \quad (\text{Alt yarısında dolma})$$

Havuzun üst yarısının dolma süresi:

$$\frac{44}{15} - \frac{4}{3} = \frac{44}{15} - \frac{20}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \text{ saatte dolar.}$$

Üst yarısında dolma durumuna göre B'nin durumu:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = 8$$

**Örnek:** Normal akış hızı % 25 artan musluk, boş havuzu 12 saatte doldurursa normal akış hızında ne kadarda doldurur?

V akış hızı % 25 artmışsa akış hızı 1,25V olur.

1,25V hızla 12 saatte dolarsa; V hızıyla t saatte dolar. (TO)

$$1,25 * V * 12 = V * t \Rightarrow t = 15 \text{ saatte dolar.}$$

## N. YÜZDE, KAR – ZARAR, FAİZ PROBLEMLERİ

### Yüzde Problemleri:

\*  $a * \frac{x}{100}$  Bir a sayısının % x'i

\*  $a * \frac{x}{100} * \frac{y}{100}$  Bir a sayısının % x'inin % y'si

\*  $a * \left(\frac{100+x}{100}\right)$  Bir a sayısının % x kârlı satışı

\*  $a * \left(\frac{x}{100}\right)$  Bir a sayısının % x kârı

\*  $a * \left(\frac{100-y}{100}\right)$  Bir a sayısının % y zararlı satışı

\*  $a * \left(\frac{-y}{100}\right)$  Bir a sayısının % y zararı

\* Verilen problemlerde 100x baz alarak çözüme gidilir.

**Örnek:** Hangi sayının % 25'inin % 40'ı 12'ye eşittir?

$$a * \frac{25}{100} * \frac{40}{100} = 12 \Rightarrow a = 120$$

**Örnek:** Bir otobüsteki yolcuların % 40'ı kadındır. Bu otobüsten erkek yolcuların % 20'si inip, otobüse belirli sayıda kadın yolcu bindiğinde, otobüsteki erkek yolcuların sayısı kadının yolcuların sayısına eşit oluyor. Otobüse binen kadın yolcuların sayısı, otobüste bulunan kadın yolcuların sayısının % kaçındır?

Yolcuların tamamı: 100x

Kadın yolcuların sayısı:  $100x * \frac{40}{100} = 40x$

Erkek yolcuların sayısı:  $100x - 40x = 60x$

Otobüsten erkek yolcuların % 20'si indiğinden;

İnen erkek yolcu sayısı:  $60x * \frac{20}{100} = 12x$

Otobüste kalan erkek yolcu sayısı:  $60x - 12x = 48x$

Otobüse a tane kadın yolcu bindiğinde, otobüsteki erkek yolcuların sayısı kadın yolcuların sayısına eşit ise:

$$40x + a = 48x \Rightarrow 8x = a$$

Otobüse binen kadın yolcuların sayısı, otobüste bulunan kadın yolcuların sayısının % b'si:

$$40x * \frac{b}{100} = 8x \Rightarrow b = 20$$

**Örnek:** Bir sınıfın % 80'i kız, kızların % 25'i gözlüklüdür. Buna göre gözlüksüz kızlar sınıfın yüzde kaçındır?

Sınıfın tamamı: 100x

Kız sayısı:  $100x * \frac{80}{100} = 80x$

Erkek sayısı:  $100x - 80x = 20x$

Gözlüklü kız sayısı:  $80x * \frac{25}{100} = 40x$

|           | Erkek | Kız  | Toplam |
|-----------|-------|------|--------|
| Gözlüklü  |       | 20*x |        |
| Gözlüksüz |       | 60*x |        |
| Toplam    | 20*x  | 80*x | 100*x  |

Gözlüksüz kızlar, sınıfın % k'sı ise;

$$100x * \frac{k}{100} = 60x \Rightarrow k = 60 (\%)$$

**Örnek:** İki sayının çarpımında sayılardan biri % 25 artırılıp diğer sayı % 20 azaltılırsa çarpım nasıl değişir?

$a * b$  İstenen çarpım

$a * \left(\frac{100+25}{100}\right) = 1,25 * a$  a sayısı % 25 arttırılırsa

$b * \left(\frac{100-20}{100}\right) = 0,8 * b$  b sayısı % 20 azaltılırsa

$1,25 * a * 0,8 * b = a * b$  Son durumdaki çarpım

İlk çarpım ile son çarpım aynı. Değişmemiştir.

### Kâr – Zarar Problemleri:

\* **A:** Malın alış (oluş, maliyet) fiyatı

\* **S:** Malın satış (etiket) fiyatı

\* **x:** Kâr yüzdesi

\* **y:** Zarar yüzdesi

\* **K:** Kâr

\* **Z:** Zarar

\*  $Kâr = Satış fiyatı - Alış fiyatı$

\*  $K = S - A = A * \frac{x}{100}$

\*  $Zarar = Alış fiyatı - Satış fiyatı$

\*  $Z = A - S = A * \frac{-y}{100}$

**Örnek:** Defterlerin 6 tanesini 5 TL'ye alan bir kırtasiyecisi, 3 tanesini 4 TL'ye satmıştır. Buna göre kırtasiyecisi defterlerin satışından % kaç kâr elde etmiştir?

1 tane defter maliyeti:  $A_x = \frac{A}{x} = \frac{5}{6}$

1 tane defter satışı:  $S_y = \frac{S}{y} = \frac{4}{3}$

1 tane defter kâr durumu:  $K = S_x - A_x = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$

Defter kâr yüzdesi:  $K = A_x * \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{6} * \frac{x}{100} \Rightarrow x = 60$

**Örnek:** Şeker kilogramı a TL, şeker % 25 zam yapılırsa a TL'ye kaç kg şeker alınır?

1 kg şeker zamlı fiyatı:  $S = a * \frac{100+25}{100} = \frac{5 * a}{4}$

x kg şeker zamlı fiyatı:  $\frac{1 \text{ kg seker}}{x \text{ kg seker}} * \frac{5a}{4} \text{ TL ise (D.O.)}$   
 $\frac{5a}{4} \text{ TL olur}$

$\Rightarrow \left(\frac{5 * a}{4}\right) * x = (a) * 1 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ kg şeker alınabilir.}$

**Örnek:** Bir manav kilosunu x liradan y kilo elma alıyor. Elmanın 5 kilosunu çürük çıkıyor. Buna göre 1 kilo elma kaç liraya mal olur?

Kilosu  $x$  lira'dan  $y$  kg elma alış :  $A = x * y$  lira  
 5 kilo elma çürük ise alış :  $A = x * (y - 5)$  lira  
 1 kilo elma maliyeti  $a$  lira ise :  

|                 |   |               |            |
|-----------------|---|---------------|------------|
| $(y-5)$ kg elma | X | $x*y$ lira    | ise (D.O.) |
| 1 kg elma       |   | $a$ lira olur |            |

$$\Rightarrow a * (y - 5) = x * y * 1 \Rightarrow a = \frac{x * y}{y - 5}$$
 lira

**Örnek:** Bir satıcı elindeki malların tanesini 20 TL'den satarsa 160 TL kâr, 12 TL'den satarsa ne kâr ne de zarar ediyorsa satıcının elinde kaç mal vardır?

$$S1 = S2 \Rightarrow A1 + K1 * A1 = A2 + K2 * A2$$

$$\Rightarrow 20 * x - 160 = 12 * x + 0 \Rightarrow 8 * x = 160 \Rightarrow x = 20 \text{ mal var.}$$

**Not:** Tanesi  $a$  lira olan  $x$  tane maldan  $y$  lira kâr elde ederse  $a*x(-)$  y,  $y$  lira zarar ederse  $a*x(+)$  y lira  $x$  tane satışa eklenir.

**Örnek:** Yıllık enflasyon % 40 olan ülkede çalışan bir işçinin yıl sonunda maaşına % 26 zam yapılır. Buna göre işçinin yılsonundaki alım durumu nedir?

İşçinin yıl içindeki maaşı : 100 TL  
 Enflasyona göre yılsonunda alması gereken maaşı:

$$100 * \frac{100 + 40}{100} = 140 \text{ TL}$$

İşçinin maaşına yapılan zam sonundaki maaşı:

$$100 * \frac{100 + 26}{100} = 126 \text{ TL}$$

Enflasyona göre 140 TL olması gerekirken zam ile 126 TL maaş alan işçinin kaybı:  $140 - 126 = 14 \text{ TL}$

|           |   |             |        |
|-----------|---|-------------|--------|
| 140 TL'de | X | 14 TL kayıp | (D.O.) |
| 100 %     |   | $x$ % olur  |        |

$$\Rightarrow 140 * x = 14 * 100 \Rightarrow x = 10 \%$$

Yılsonunda alım gücü % 10 azalır işçinin.

**Örnek:** Yaş incir kurutulduğunda ağırlığının % 20'sini kaybediyor. Yaş incirin kg 2 TL'den alan satıcı, inciri kurutup kg 3 TL'den satarsa % kaç kâr elde eder?

Satıcı aldığı kg miktarı : 100 kg  
 Kg 2 TL'den alırsa maliyet :  $100 * 2 = 200 \text{ TL}$   
 İncir kurutulduğunda miktar :  $100 * \frac{100 - 20}{100} = 80 \text{ kg}$

Kuru incirin kazandırdığı :  $80 * 3 = 240 \text{ TL}$   
 Satıcının kârı :  $K = 240 - 200 = 40 \text{ TL}$

|           |   |            |        |
|-----------|---|------------|--------|
| 200 TL'de | X | 40 TL kar  | (D.O.) |
| 100 %     |   | $x$ % olur |        |

$$\Rightarrow 200 * x = 40 * 100 \Rightarrow x = 20 \%$$
 (Kâr yüzde)

**Faiz Problemleri:**

- \* **F:** Faiz miktarı
- \* **A:** Anapara
- \* **n:** Yıllık faiz yüzdesi (%)
- \* **t:** Süre (Yıl, ay veya gün)
- \* **P:** Faizli para miktarı

|                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| $f = \frac{A * n * t}{100}$   | Yıllık faiz miktarı (n: yıl) |
| $f = \frac{A * n * t}{1200}$  | Aylık faiz miktarı (n: ay)   |
| $f = \frac{A * n * t}{36000}$ | Günlük faiz miktarı (n: gün) |
| $P = A + f$                   | Faizli para miktarı          |

KPSSCini.com

|   |                          |
|---|--------------------------|
| $f_1 = \frac{A_1 * n_1 * t_1}{100}$         | Basit faiz (yıllık)      |
| $f_2 = \frac{(A_1 + f_1) * n_2 * t_2}{100}$ | Bileşik faiz (yıllıklar) |

**Örnek:** Yıllık % 36 basit faiz oranı üzerinden bankaya yatırılan bir miktar para, kaç ay sonra kendisinin % 30'u kadar faiz geliri getirir?

$$f = \frac{A * n * t}{1200} \Rightarrow A * \frac{30}{100} = \frac{A * 36 * t}{1200} \Rightarrow t = 10 \text{ ay}$$

**Örnek:** Bankaya yatırılan para bir yılda, yıllık % 32 faiz oranı üzerinden  $a$  milyon TL, yıllık % 24 faiz oranı üzerinden ise  $(a - 24)$  milyon TL faiz getirir. Bankaya ne kadar yatırıldı?

$$f_1 = \frac{A * n_1 * t}{100} \Rightarrow a = \frac{A * 32 * 1}{100}$$

$$f_2 = \frac{A * n_2 * t}{100} \Rightarrow a - 24 = \frac{A * 24 * 1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{A * 32}{100} - 24 = \frac{A * 24}{100} \Rightarrow \frac{8 * A}{100} = 24 \Rightarrow A = 300 \text{ milyon TL}$$

**Örnek:** Bir miktar paranın 1/4'ü yıllık % 30 basit faiz oranı üzerinden, geri kalanı ise % 20 basit faiz oranı üzerinden 4 yıllığına faize yatırılıyor. 4 yılsonunda toplam 540 TL faiz alındığına göre faize yatırılan toplam para nedir?

$$f_1 = \frac{A_2 * n_1 * t}{100} = \frac{A * 30 * 4}{100} = \frac{120 * A}{100} \text{ (Paranın 1/4'ü)}$$

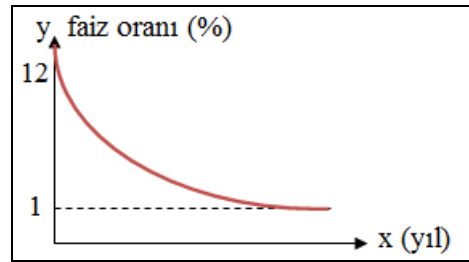
$$f_2 = \frac{A_2 * n_2 * t}{100} = \frac{3 * A * 20 * 4}{100} = \frac{240 * A}{100} \text{ (Paranın 3/4'ü)}$$

$$f_1 + f_2 = \frac{120 * A}{100} + \frac{240 * A}{100} = \frac{360 * A}{100} = 540 \text{ (Toplam faiz)}$$

$$A = 25 * 6 = 150 \text{ TL}$$

Yatırılan anapara =  $4 * A = 600 \text{ TL}$

**Örnek:** Grafikte, bir bankanın vadeli hesaplara uyguladığı yıllık faiz oranının değişimi verilmiştir.



$$y = \frac{x + 48}{x + 4} \text{ bağıntısı}$$

Kaçıncı yıldan sonra yıllık faiz oranı % 5'in altına düşer?

$$y < 5 \Rightarrow \frac{x + 48}{x + 4} < 5 \Rightarrow x + 48 < 5 * x + 20$$

$$\Rightarrow 28 < 4 * x \Rightarrow 7 < x$$

7. yıldan sonra faiz oranı % 5'in altına düşer.

**Örnek:** Engin parasını yıllık basit faizle bankaya yatırmıştır. Bu parayı yıllık % 45 basit faizle yatırırsa bir yılda 90 TL fazla faiz alacaktır. Engin'in faize yatırdığı para?

$$f_1 = f_2 + 90 \Rightarrow \frac{A * 45 * 1}{100} = \frac{A * 30 * 1}{100} + 90$$

$$f_1 = f_2 + 90 \Rightarrow \frac{15 * A}{100} = 90 \Rightarrow A = 600 \text{ TL}$$

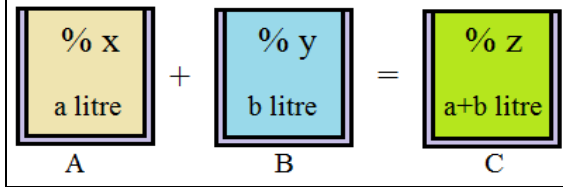
### O. KARIŞIM PROBLEMLERİ

$$* \text{ Madde Yuzdesi} = \frac{\text{Saf Madde Miktarı}}{\text{Karişim Miktarı}} = \frac{X}{100}$$

$$* \text{ Saf Madde Miktarı} = \text{Karişim Miktarı} * \frac{\text{Etkin Madde Miktarı}}{100}$$

$$* \text{ Saf altın} = 24 \text{ ayar}$$

\* Karişimde etkin madde eklenirse veya çıkarılırsa % 100; etkin olmayan madde eklenirse veya çıkarılırsa % 0 kabul edilir. (Örneğin; % 20'si alkol (etkin madde) olan alkol – su karişımına alkol eklenirse % 100, su eklenirse % 0)



\* A kabında % x'i tuz olan a lt, B kabında % y'i tuz olan b lt iken ikisi C kabında karişırıldığında (a+b) litrelik karişımın tuz yuzdesi z ise;

$$a * \frac{x}{100} + b * \frac{y}{100} = (a + b) * \frac{z}{100}$$

$$\Rightarrow a * x + b * y = (a + b) * z \Rightarrow z = \frac{a * x + b * y}{a + b}$$

**Örnek:** 11 gr 18 ayar altın karişımında altının ayarını 22'ye çıkarmak için karişıma kaç gr saf altın katılır?

$$11 * 18 + x * 24 = (11 + x) * 22 \Rightarrow 198 + 24 * x = 242 + 22 * x$$

$$\Rightarrow 2 * x = 44 \Rightarrow x = 22 \text{ gr saf altın}$$

**Örnek:** 12 gr 15 ayar altın ile 18 gr 20 ayar altın eritilerek karişırıldığında oluşan karişım?

$$12 * 15 + 18 * 20 = 30 * x \Rightarrow 30 * x = 540 \Rightarrow x = 18 \text{ ayar}$$

**Örnek:** 96 gr su ile 24 gr tuz karişırsa karişımın tuz oranı?

$$24 = (96 + 24) * \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{24 * 100}{120} = 20 (\%)$$

**Örnek:** Alkol oranı % 30 olan 50 litrelik alkol- su karişıma 10 lt su, 20 lt saf alkol, su oranı % 40 olan 15 litre karişım eklenir ve 5 litre su buharlaştırılırsa karişımın alkol oranı ne?

$$50 * \frac{30}{100} + 10 * \frac{0}{100} + 20 * \frac{100}{100} + 15 * \frac{100 - 40}{100} - 5 * \frac{0}{100} = (50 + 10 + 20 + 15 - 5) * \frac{x}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{50 * 30}{100} + 0 + \frac{20 * 100}{100} + \frac{15 * 60}{100} - 0 = \frac{90 * x}{100}$$

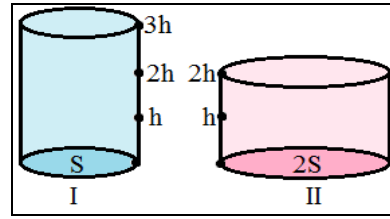
$$\Rightarrow 1500 + 2000 + 900 = 90 * x \Rightarrow x = \frac{4400}{90} = 48,8 (\%)$$

**Örnek:** Kilogramı 5 TL olan 12 kg pirinç ile kilogramı 3,5 TL olan 8 kg pirinç karişırılıyor. Bu karişımdan % 25 kar elde etmek için karişımın kilogramı kaç TL?

$$12 * 15 + 8 * 3,5 = 20 * x \Rightarrow 20 * x = 88 \Rightarrow x = 4,4 \text{ TL}$$

$$4,4 * \frac{125}{100} = 5,5 \text{ TL} \text{ (% 25 kâr elde etmek için karişım kg)}$$

**Örnek:** Şekildeki kaplardan birincisinin taban alanı S cm<sup>2</sup>, yüksekliği 3\*h cm; ikincisinin taban alanı 3S cm<sup>2</sup>, yüksekliği 2h cm'dir. Tuz-un karişımıyla dolu olan bu kaplardan I. Kaptaki karişımın tuz oranı % 90, II. kaptakinin ise % 60 ise bu kaplarda tuz – un karişımları üçüncü bir kapta karişırılırsa yeni karişımın tuz oranı?



$$V_1 = S * 3 * h = 3 * S * h = 3 * V \quad (1. \text{ kap hacmi})$$

$$V_2 = 3 * S * 2 * h = 6 * S * h = 6 * V \quad (2. \text{ kap hacmi})$$

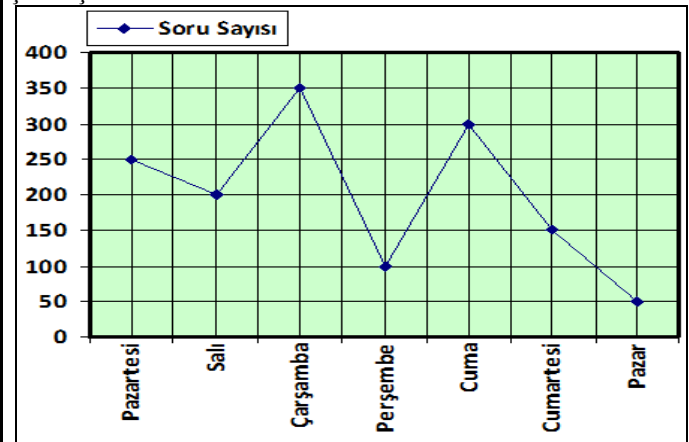
$$3V * \frac{90}{100} + 6V * \frac{60}{100} = (3V + 6V) * \frac{x}{100}$$

$$270 * V + 360 * V = 9V * x \Rightarrow x = \frac{630}{9} = 70 (\%)$$

### P. GRAFİK PROBLEMLERİ

#### Cizgi Grafiği:

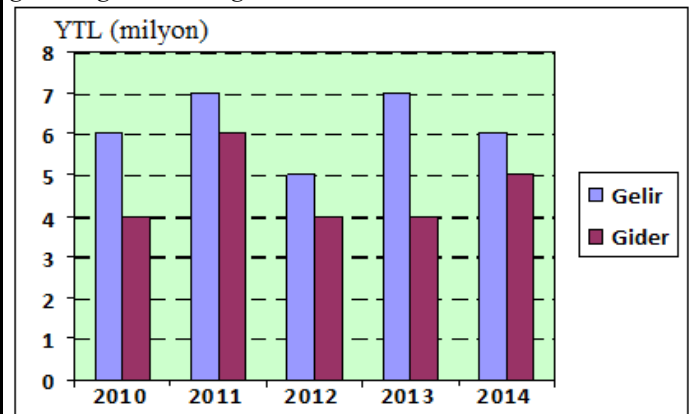
**Örnek:** Grafikte Serkan'ın bir hafta boyunca çözdüğü soru sayısı verilmiştir. Serkan bu bir haftada ortalama kaç soru çözmüştür?



$$\frac{250 + 200 + 350 + 100 + 300 + 150 + 50}{7} = \frac{1400}{7} = 200 \text{ soru}$$

#### Sütun Grafiği:

**Örnek:** Grafik, bir firmanın 2010 – 2014 yılları arasında gelir ve giderlerinin gösterir.



Firma en fazla kazancı hangi yılda yapmıştır? Firmanın 5 yıl boyunca ortalama kazancı nedir?

$$2010 \Rightarrow \text{Kazanç} = 6 - 4 = 2 \text{ milyon YTL}$$

$$2011 \Rightarrow \text{Kazanç} = 7 - 6 = 1 \text{ milyon YTL}$$

$$2012 \Rightarrow \text{Kazanç} = 5 - 4 = 1 \text{ milyon YTL}$$

$$2013 \Rightarrow \text{Kazanç} = 7 - 4 = 3 \text{ milyon YTL}$$

$$2014 \Rightarrow \text{Kazanç} = 6 - 5 = 1 \text{ milyon YTL}$$

En fazla kazancı 2013 yılında 3 milyon YTL.

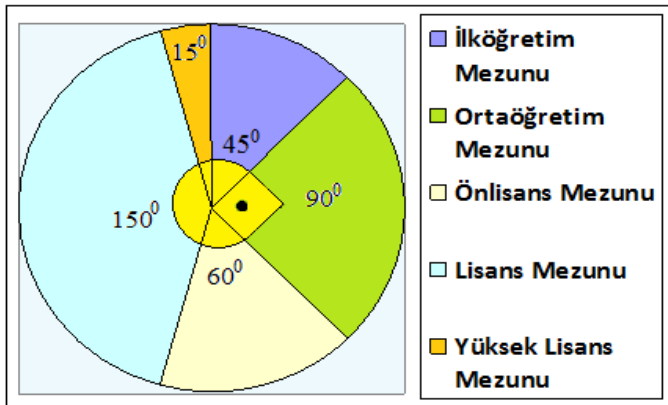


Firmanın 5 yıl ortalama kazancı:

$$\frac{2+1+1+3+1}{5} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ milyon YTL}$$

**Daire Grafiği:**

**Örnek:** Grafik, bir iş yerinde çalışan 120 kişinin en son mezun oldukları öğretim düzeylerine göre dağılımı gösterir.



✚ Bu iş yerinde çalışan lisans mezunu sayısı nedir?

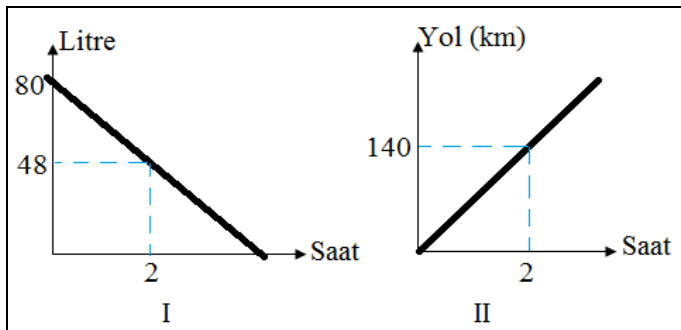
$$\begin{aligned} &120 \text{ kişi} \times \frac{360^\circ}{150^\circ} \text{ gösteriliyorsa} \\ &x \text{ kişi} \times 150^\circ \text{ gösterilir} \\ \Rightarrow &x * 360 = 150 * 120 \Rightarrow x = 50 \text{ kişi} \end{aligned}$$

✚ Bu iş yerinde çalışan önlisans mezunlarından 10 kişi ayrılıp onların yerine lisans mezunu 10 kişi alınırsa çalışanlar içinde lisans mezunlarının % oranı nedir?

$$\begin{aligned} x &= 120 * \frac{150}{360} = 50 \text{ kişi lisans mezunu} \\ x &= 120 * \frac{60}{360} = 20 \text{ kişi önlisans mezunu} \\ 20 - 10 &= 10 \text{ kişi önlisans mezunu kalır} \\ 50 + 10 &= 60 \text{ kişi lisans mezunu olur} \\ 60 &= 120 * \frac{y}{100} \Rightarrow y = 50 (\%) \end{aligned}$$

**Doğru Grafiği:**

**Örnek:** Aşağıdaki I. grafik, sabit hızla hareket eden bir aracın yolda geçen süreye göre deposunda kalan benzin miktarını, II. grafik ise aynı aracın yolda geçen süreye göre aldığı yol miktarını gösterir. Bu araç, deposunda bulunan 80 litre benzinle kaç km yol alır?



$$\begin{aligned} x &= V * t \Rightarrow V = \frac{x}{t} = \frac{140}{2} = 70 \text{ km/h (1 saatteki hızı)} \\ 2 \text{ saatte } &80 - 48 = 32 \text{ litre benzin tüketir.} \\ 1 \text{ saatte } &32 / 2 = 16 \text{ litre benzin tüketir.} \\ 80 \text{ litre benzinle } &80 / 16 = 5 \text{ saat yol alabilir.} \\ x &= V * t = 70 * 5 = 350 \text{ km yol alır.} \end{aligned}$$

**Tablo:**

**Örnek:** Aşağıdaki tabloda 2003, 2004 ve 2005 yıllarında çeşitli etkinliklere katılan kişi sayısı verilmiştir.

| ETKİNLİK     | YILLAR |      |      |
|--------------|--------|------|------|
|              | 2003   | 2004 | 2005 |
| Ahşap Boyama | 72     | 60   | 30   |
| Örgü         | 65     | 30   | 40   |
| Ebru         | 95     | 60   | 35   |
| Seramik      | 36     | 35   | 60   |
| Cam Süsleme  | 40     | 25   | 20   |

✚ Cam süsleme etkinliğine 2004 yılında katılan kişi sayısı, 2003 yılına göre % kaç azaldı?

$$40 * \frac{x}{100} = 40 - 25 \Rightarrow x = \frac{15 * 100}{40} = 37,5 (\%)$$

✚ Etkinliklere 2004 yılında katılanlar bir daire grafiğiyle gösterildiğinde, seramik kursuna katılanlara ait daire diliminin merkez açısı nedir?

$$\begin{aligned} &210 \text{ kişi} \times \frac{360^\circ}{35} \text{ gösteriliyorsa} \\ &35 \text{ kişi} \times \alpha^\circ \text{ gösterilir} \\ \Rightarrow &35 * 360 = \alpha * 210 \Rightarrow \alpha = 60^\circ \end{aligned}$$

✚ Bir sütun grafiğinde büyükten küçüğe doğru kişi sayıları gösterilmiş olsa idi ortadaki etkinlik ne olurdu?

Ahşap boyama (162 kişi), örgü (135 kişi), ebru (190 kişi), seramik (131 kişi), cam süsleme (85 kişi) oluyorsa sıralama:  
**Ebru > Ahşap Boyama > Örgü > Seramik > Cam Süsleme**  
Buna göre ortadaki etkinlik örgü idir.

**Q. KÜMELER**

\* Kümelerde eleman sayısı : s(A), s(B), vb.

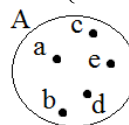
\*  $A = \{a, b, \{c, d\}, e, f\}$  ise;

✓  $s(A) = 5$

✓  $a \in A; b \in A; e \in A; f \in A; \{c, d\} \in A$  (Aitlik)

✓  $c \notin A, d \notin A$

\*  $A = \{a, b, c, d, e\}$  Liste gösterimi



Venn şeması ile gösterim

\*

\*  $M = \{0, 2, 4, \dots\}$   
 $M = \{\text{Çift } Z^+\}$

Ortak özellik yöntemi ile gösterimi

\* Boş küme :  $\{\}$  veya  $\emptyset$  ( $s(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$ )

$A = \{ \}, B = \{d\} \Rightarrow A = \emptyset, B \neq \emptyset$

\* Denk küme :  $\equiv$  ( $s(A) = s(B) \Rightarrow A \equiv B$ )

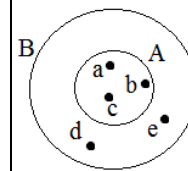
$A = \{a, b, c\}, B = \{d, e, f\} \Rightarrow A \equiv B$

\* Eşit küme :  $\equiv$  (Elemanları aynı olmalı)

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c\} \Rightarrow A = B$

\* Alt küme :  $\subset$  veya  $\supset$

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow A \subset B$



$A \subset B$   
B, A'yı kapsar  
A, B'nin bir alt kümesi

\* Alt küme özellikleri:

- ☞  $A \subset A$
- ☞  $\emptyset \subset A$
- ☞  $A \subset B$  ve  $B \subset A$  ise  $A = B$
- ☞  $A \subset B$  ve  $B \subset C$  ise  $A \subset C$

\*  $s(A) = n$  olmak üzere;

- ☞ A kümesinin alt küme sayısı:  $2^n$
- ☞ A kümesinin öz alt küme sayısı:  $2^n - 1$

**Örnek:**  $A = \{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$   
 $c \notin A, \{c\} \in A, \{d, e\} \subset A, \{\{d, e\}\} \subset A, \{a\} \subset A, \{d, e\} \in A$

**Örnek:**  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 5 bulunmaz?

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow s(A) = 5 \Rightarrow 2^3 = 8$$

**Örnek:**  $A = \{a, b, c, d, e\}$  kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde a bulunurken e bulunmaz?

\* Alt kümede e bulunması istenmiyor, bundan çıkartılır.

$$A = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow s(A) = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$$

Kalan 4 elemanlıda a bulunması gerektiğinden kalan 3 elemanlıda a'nın bulunmadığı durumlar:

$$A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow s(A) = 3 \Rightarrow 2^3 = 8 \Rightarrow 16 - 8 = 8 //$$

\* Veya kombinasyon ile bulunursa;

$$C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$$

İki elemanlıda 2 şekilde e bulunmaz.  $10 - 2 = 8 //$

**Örnek:**  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a bulunurken d bulunmaz?

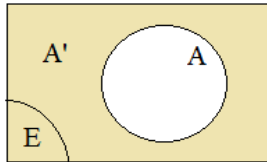
$$\frac{a}{\text{---}} \quad A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

**Evrensel Küme – Tümlen:**

\* **Evrensel küme:** E ile gösterilir. Bütün kümeleri kapsar.

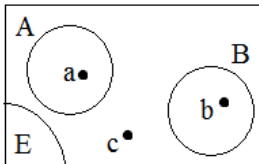
\* **Tümlen:**  $A'$  veya  $\bar{A}$  ile gösterilir. A kümesinde olmayan, evrensel kümede olan kümedir.



$$s(A) + s(A') = s(E)$$

- ☞  $(A')' = A$
- ☞  $E' = \emptyset = \{\}$
- ☞  $\emptyset' = E$
- ☞  $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

**Örnek:**

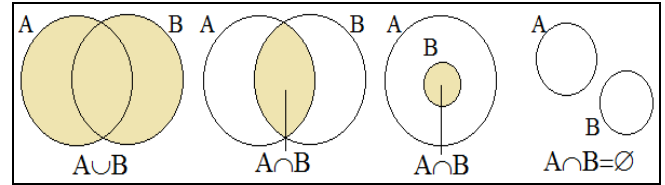


- $E = \{a, b, c\}$
- $A' = \{b, c\}$
- $B' = \{a, c\}$

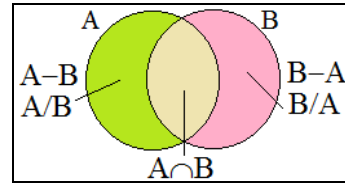
**Örnek:**  $s(A') + s(B) = 16 \Rightarrow s(E) = ?$   
 $s(A) + s(B') = 10$   
 $s(A) + s(A') + s(B) + s(B') = 16 + 10$   
 $s(E) + s(E) = 26 \Rightarrow 2 \cdot s(E) = 26 \Rightarrow s(E) = 13$

**Kümelerde İşlemler – Fark:**

- \* Kümelerde Birleşim:  $A \cup B, vb.$
- \* Kümelerde Kesişim:  $A \cap B, vb.$
- \* Kümelerde Ayrık:  $A \cap B = \emptyset vb.$

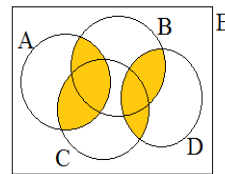


**Kümelerde Fark Kavramı:**



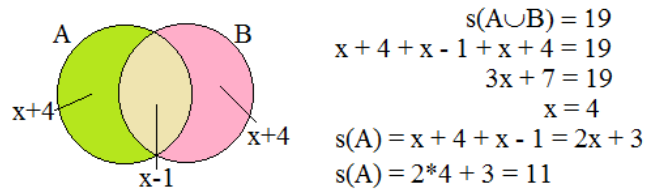
- ☞  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ☞  $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ☞  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ☞  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ☞  $s(A \cup B) = s(A) + s(B - A)$
- ☞  $s(A \cup B) = s(B) + s(A - B)$
- ☞  $s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$
- ☞  $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
- ☞ Kümelerde “ve” bağlaç “Kesişim”, “veya” bağlaç “Birleşim” i anlamlandırır.

**Örnek:** Şekildeki taralı bölge nasıl ifade edilir?



$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cap (B \cup C) \cup D \cap (B \cup C) = (A \cap D) \cap (B \cup C)$$

**Örnek:**  $s(A - B) = s(B - A) = x + 4$   
 $s(A \cap B) = x - 1 \Rightarrow s(A) = ?$   
 $s(A \cup B) = 19$



$$s(A \cup B) = 19$$

$$x + 4 + x - 1 + x + 4 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$x = 4$$

$$s(A) = x + 4 + x - 1 = 2x + 3$$

$$s(A) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

**Örnek:** Bir sınıftaki öğrencilerin % 65'i İngilizce, % 45'i ise Almanca biliyor. Sınıftaki öğrencilerden her biri bu dillerden en az birini bildiğine ve her iki dili bilen 4 öğrenci olduğuna göre sınıf mevcudu nedir?

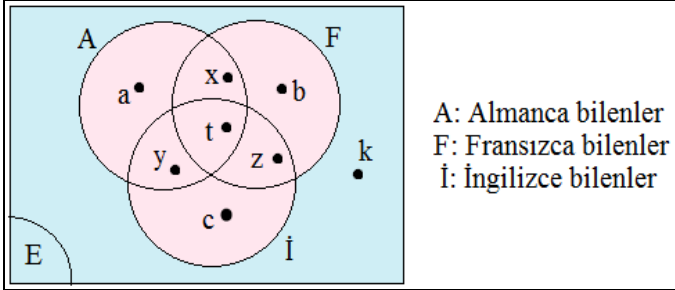
$$s(I \cup A) = s(I) + s(A) - s(I \cap A)$$

$$100 * x = 65 * x + 45 * x - s(I \cap A)$$

$$s(I \cap A) = 10 * x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

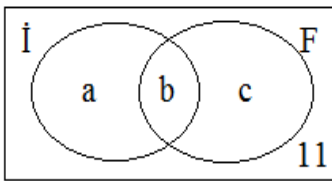
$$s(I \cup A) = 100 * x = 100 * \frac{2}{5} = 40 \quad (\text{Mevcut kişi})$$

**Üçlü Seklin Yorumlanması:**



- Sadece 1 dil bilenlerin sayısı = a + b + c
- En az 1 dil bilenlerin sayısı = a + b + c + x + y + z + t
- En çok 1 dil bilenlerin sayısı = a + b + c + k
- Sadece 2 dil bilenlerin sayısı = x + y + z
- En az 2 dil bilenlerin sayısı = x + y + z + t
- En çok 2 dil bilenlerin sayısı = x + y + z + a + b + c + k
- 3 dil bilenlerin sayısı = t
- En az 3 dil bilenlerin sayısı = t
- En çok 3 dil bilenin sayısı = a + b + c + x + y + z + t + k
- Hiç dil bilmeyenlerin sayısı = k
- Almanca dilini bilenlerin sayısı = a + x + y + t
- Sadece Almanca dilini bilenlerin sayısı = a
- Fransızca dilini bilenlerin sayısı = b + x + z + t
- Sadece Fransızca dilini bilenlerin sayısı = b
- İngilizce dilini bilenlerin sayısı = c + y + z + t
- Sadece İngilizce dilini bilenlerin sayısı = c

**Örnek:** 38 kişilik bir sınıfta Fransızca bilen 14 ve bu iki dili de bilmeyen 11 kişi olduğuna göre sadece İngilizce bilen kaç kişi vardır?



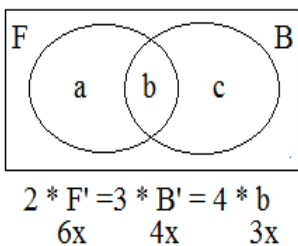
$$a + b + c + 11 = 38$$

$$a + b + c = 27$$

$$b + c = 14$$

$$a = 27 - 14 = 13$$

**Örnek:** Futbol ve basketbol oynayanların oluşturduğu bir sınıfta futbol oynamayanların sayısının 2 katı, basketbol oynamayanların sayısının 3 katı ve her iki sporla da ilgilenenlerin sayısının 4 katı birbirine eşittir. Sınıf mevcudu 30'dan fazla ise bu sınıfta en az kaç kişi futbol oynar?



$$c = 6x, a = 4x, b = 3x$$

$$a + b + c > 30$$

$$4x + 3x + 6x > 30$$

$$13x > 30$$

$$x > 2,3..$$

$$x = 3 \text{ ise } F = a + b = 7x = 21$$

**R. İŞLEM**

\* Δ, ♣, ♠, ∇, ⊕ gibi sembollerle yapılan kurallardır.

**Örnek:** Tamsayılar kümesi üzerinde Δ işlemi aşağıdaki biçimde tanımlanıyor. Buna göre 3 Δ 5 = ?

$$x \Delta y = x * y + x - y$$

$$3 \Delta 5 = 3 * 5 + 3 - 5 = 13$$

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “⊕” işlemi aşağıdaki biçimde tanımlanıyor. Buna göre 2 ⊕ 3 = ?

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = x + y - x * y$$

$$\frac{1}{1/2} \oplus \frac{1}{1/3} = 2 \oplus 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- \*  $a \oplus b = b \oplus a \Rightarrow \oplus$  işleminin “**değişme özelliği**”
- \*  $x \oplus e = e \oplus x = x \Rightarrow \oplus$  işleminin “**birim (etkisiz) eleman**”
- \*  $x \oplus y = y \oplus x = e \Rightarrow \oplus$  işleminin “**x'in tersi**” ( $y = x^{-1}$ )
- \*  $x \oplus y = y \oplus x = y \Rightarrow \oplus$  işleminin “**yutan eleman**”

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “♠” işlemi,  $a \spadesuit b = 2a + b - (b \spadesuit a)$  biçiminde tanımlanıyor. ♠ işleminin değişme özelliği olursa 3 ♠ (-2) = ?

$$a \spadesuit b = 2a + b - (b \spadesuit a) \Rightarrow (a \spadesuit b) + (b \spadesuit a) = 2a + b$$

Değişme özelliği  $\Rightarrow (a \spadesuit b) = (b \spadesuit a)$

$$\Rightarrow 2 * (a \spadesuit b) = 2a + b \Rightarrow a \spadesuit b = \frac{2a + b}{2}$$

$$\Rightarrow 3 \spadesuit (-2) = \frac{2 * 3 - 2}{2} = 2$$

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “⊕” işlemi,  $a \oplus b = \begin{cases} a + b - 1 & , a \leq b \text{ ise,} \\ 2a - b & , a > b \text{ ise,} \end{cases}$  biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre  $(2 \oplus 1) \oplus 3 = ?$

$$2 > 1 \Rightarrow 2 \oplus 1 = 2 * 2 - 1 = 3$$

$$3 \leq 3 \Rightarrow 3 \oplus 3 = 3 + 3 - 1 = 5$$

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “Δ” işlemi,  $x \Delta y = x + y - 5$  biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre Δ işleminin birim (etkisiz) elemanı kaçtır?

Birim eleman e olsun.  $x \Delta e = x$  yolundan;  
 $x \Delta e = x = x + e - 5 \Rightarrow e = 5$

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “Δ” işlemi,  $x \Delta y = x + y + 2$  biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre Δ işleminde 3'ün tersi kaçtır?

Birim eleman e olsun.  $x \Delta e = x$  yolundan;  
 $x \Delta e = x = x + e + 2 \Rightarrow e = -2$

Δ işleminde 3'ün tersi  $3^{-1}$ ,  $3 \Delta 3^{-1} = e$  ise;  
 $3 \Delta 3^{-1} = e \Rightarrow 3 + 3^{-1} + 2 = -2$   
 $3^{-1} = -7 //$

**Örnek:** Reel sayılar kümesi üzerinde “o” işlemi,  $xoy = x + y - 2xy$  biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre o işleminin yutan elemanı kaçtır?

Yutan elemanda  $xoy = yox = y$  ise;

$$xoy = y = x + y - 2xy \Rightarrow 2xy = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

**Tabloda İşlem**

\*  $A = \{a, b, c, d, e\}$  kümesinde “ $\Delta$ ” işlemi olsun:

|          |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | a | b | c | d | e |
| a        | d | e | a | b | c |
| b        | e | a | b | c | d |
| c        | a | b | c | d | e |
| d        | b | c | d | e | a |
| e        | c | d | e | a | b |

\* Satır ve sütunda işlemlerin kesiştikleri nokta o işlemin sonucudur. Satır ve sütunda aynı hizada ana sıralamanın çakıştıkları nokta ise o işlemin birim elemanıdır. ( $e = c$ )

\*  $\Delta$  işlemine göre tabloda;

- $a^2 = a\Delta a$
- $a^3 = a\Delta a\Delta a$
- $a^n = \underbrace{a\Delta a\Delta a\Delta \dots \Delta a}_n$  tan e

**Örnek:** Yukarıdaki tabloda aşağıdaki işlemler nedir?

- \*  $(a\Delta b)\Delta(c\Delta d) = e\Delta d = a$
- \*  $a\Delta[b\Delta(c\Delta(d\Delta e))] = a\Delta[b\Delta(c\Delta a)] = a\Delta[b\Delta a] = a\Delta e = c$
- \*  $a^2\Delta c^2\Delta e^2 = (a\Delta a)\Delta(c\Delta c)\Delta(e\Delta e) = d\Delta c\Delta b = c$
- \*  $a^{16} = (a^2)^8 = d^8 = (d^2)^4 = e^4 = (e^2)^2 = b^2 = a$

\* Birim (etkisiz) eleman =  $e = c$

\*  $f_x(y) = x^{-1}\Delta y$  işlemi verilir.  $f_a(b) = ?$

$$f_a(b) = a^{-1}\Delta b \Rightarrow a\Delta a^{-1} = e \Rightarrow a\Delta a^{-1} = c$$

İşlem yapmadan tablodan bulacak olursak; a'nın tersi, a ile hangi rakamın kesiştiği noktada c (birim eleman) i veriyor.

Bakılırsa a ile e kesişirse c'yi verir.  $a^{-1} = e$

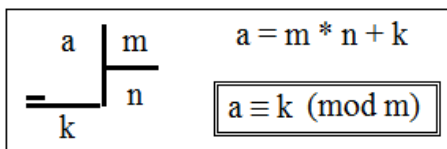
$$f_a(b) = e\Delta b = d$$

**S. MODÜLER ARİTMETİK**

\* Tekrarlı sistemlerde son varılacak noktayı bulmak için kullanılır.

$y = a*x + b$  (x'in a defa kullanılması ve kalan b'nin değerine ulaşılması.)

\*  $a, m, n, k \in Z, m > 1$  olmak üzere; a'nın m'ye bölümünden elde edilen kalan k ise mod m'de a'nın dengi k'dir ve  $a \equiv k \pmod{m}$  biçiminde gösterilir.



\* a ve b sayıları m sayısına bölündüğünde kalanlar eşit olursa ( $a = m*x + k, b = m*y + k$ );

$$a \equiv b \pmod{m}$$

$$* a \equiv k \pmod{m} \Rightarrow a - k \equiv 0 \pmod{m} \parallel a - k = m * x$$

\*  $a \equiv b \pmod{m}$  ve  $x \equiv y \pmod{m}$  olmak üzere;

- $a + x \equiv b + y \pmod{m}$

- $a - x \equiv b - y \pmod{m}$

- $a * x \equiv b * y \pmod{m}$

- $n \in Z^+ \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

- $k \in Z \Rightarrow a * k \equiv b * k \pmod{m}$

\* Bir sayının birler basamağındaki rakam (mod 10) ile bulunur. Birler basamağındaki rakam 0, 1, 5, 6 olan sayının kaçınıcı kuvveti alınırsa alınır aynı olur. Diğerlerinde kaçınıcı derecesi ilk rakamı veriyorsa o derecedekiler sağlar.

\* Haftanın günlerinde Mod 7 ile çalışılır.

\* Yılın aylarında Mod 12 ile çalışılır.

**Örnek:** 1273 sayısının mod 7'deki karşılığı nedir?

$$1273 = 7 * 181 + 6 \Rightarrow 1273 \equiv 6 \pmod{7}$$

**Örnek:**  $x \equiv 6 \pmod{9}$  denkleğini sağlayan x değeri?

$$x - 6 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x - 6 = 9 * k \quad (k \in Z)$$

$$k = 1 \Rightarrow x - 6 = 9 * k \Rightarrow x = 15$$

Burada k değerine değerler atayarak x değerleri bulunur.

**Örnek:**  $18 \equiv 0 \pmod{m}$  denkleğini sağlayan farklı m değerlerinin toplamı?

18'i tam bölen m sayısı ( $m > 1$ ) olduğuna göre; 18'in tam katmanları olacak şekilde m değerleri: 2, 3, 6, 9, 18.

$$m = 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 38 //$$

**Örnek:**  $7^{14}$  sayısının 5 ile bölümünden kalan nedir?

$$\left. \begin{array}{l} 7^1 \equiv 2 \pmod{5} \\ 7^2 \equiv 4 \pmod{5} \\ 7^3 \equiv 3 \pmod{5} \\ 7^4 \equiv 1 \pmod{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 = 5 * 1 + 2 \\ 2^2 = 4 = 5 * 0 + 4 \\ 2 * 4 = 8 = 5 * 1 + 3 \\ 2 * 3 = 6 = 5 * 1 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (7^4)^3 * 7^2 \\ = 1^3 * 4 \\ = 4 // \end{array} \right.$$

**Örnek:**  $2008^{2008}$  sayısının 10 ile bölümünden kalan nedir?

$$\left. \begin{array}{l} 2008^1 \equiv 8 \pmod{10} \\ 2008^2 \equiv 4 \pmod{10} \\ 2008^3 \equiv 2 \pmod{10} \\ 2008^4 \equiv 6 \pmod{10} \\ 2008^5 \equiv 8 \pmod{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2008 = 10 * 200 + 8 \\ 8^2 = 64 = 10 * 6 + 4 \\ 8 * 4 = 32 = 10 * 3 + 2 \\ 8 * 2 = 16 = 10 * 1 + 6 \\ 8 * 6 = 48 = 10 * 4 + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow (2008^4)^{502} = (8^4)^{502} = 8^4 = 6$$

Burada  $8^4$  sayısından sonra kalan tekrar başa dönmüştür. Bu sayının üssü ne kadar artsa da sonuç 6 çıkacaktır.

**Örnek:**  $3^{25} + 5^{48}$  toplamının birler basamağı nedir?

$$3^{25} + 5^{48} \equiv x + y \pmod{10}$$

$$3^{25} \equiv x \pmod{10}$$

$$5^{48} \equiv y \pmod{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^1 \equiv 3 \pmod{10} \\ 3^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ 3^3 \equiv 7 \pmod{10} \\ 3^4 \equiv 1 \pmod{10} \end{array} \right\} \Rightarrow (3^4)^6 * 3^1 \Rightarrow x = 3 //$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^1 \equiv 5 \pmod{10} \\ 5^2 \equiv 5 \pmod{10} \end{array} \right\} \Rightarrow (5^1)^{48} \Rightarrow y = 5 //$$

$$\Rightarrow x + y = 3 + 5 = 8 //$$
 (Birler basamağı)

**Örnek:** Bugün günlerden cumartesi olursa 424 gün sonra ve 352 gün önceki günler hangileridir?

\* 424 gün sonraki gün:  
 $424 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 424 = 7 * 60 + 4 \Rightarrow 424 \equiv 4 \pmod{7}$

Bugün 0. gün sayılarak 4 gün sonraya gidilirse:

| Cumartesi | Pazar | Pazartesi | Salı | Çarşamba |
|-----------|-------|-----------|------|----------|
| 0         | 1     | 2         | 3    | 4        |

424 gün sonraki gün = Çarşamba

\* 352 gün önceki gün:  
 $352 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 352 = 7 * 50 + 2 \Rightarrow 352 \equiv 2 \pmod{7}$

Bugün 0. gün sayılarak 2 gün önceye gidilirse:

| Perşembe | Cuma | Cumartesi |
|----------|------|-----------|
| -2       | -1   | 0         |

352 gün önceki gün = Perşembe

**Örnek:** Pazartesi 1. gün alınrsa 500. gün hangi gün olur? 1. gün Pazartesi ise 500. gün için 499 gün sonrasında bakılır.

$$499 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 499 = 7 * 71 + 2 \Rightarrow 499 \equiv 2 \pmod{7}$$

| Pazartesi | Salı | Çarşamba |
|-----------|------|----------|
| 0         | 1    | 2        |

500. gün olan Çarşamba idir.

**Örnek:** Bir asker 4 günde bir nöbet tutar. İlk nöbetini Perşembe tutarsa, 19. nöbetini hangi gün tutar?

19. nöbette ilk günü Perşembe tutarsa kalan 18 gün içinde 4 günde bir tutma olasılığı olursa  $18 * 4 = 72$  gün sonra tutar.

$$72 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 72 = 7 * 10 + 2 \Rightarrow 72 \equiv 2 \pmod{7}$$

| Perşembe | Cuma | Cumartesi |
|----------|------|-----------|
| 0        | 1    | 2         |

19. nöbetini Cumartesi tutar.

**Örnek:** Bir hasta 3 ayda bir kontrole gider. 8. kontrolüne Ocak ayında giderse ilk kontrolüne hangi ay gider?

8. kontrole Ocak ayında giderse 7 kontrol önceki olan ve her kontrol arası 3 ay olursa  $7 * 3 = 21$  ay öncesi ilk kontrolü.

$$21 \equiv x \pmod{12} \Rightarrow 21 = 12 * 1 + 9 \Rightarrow 21 \equiv 9 \pmod{12}$$

| Mayıs | Haziran | Temmuz | Ağustos | Eylül | Ekim | Kasım | Aralık | Ocak |
|-------|---------|--------|---------|-------|------|-------|--------|------|
| -8    | -7      | -6     | -5      | -4    | -3   | -2    | -1     | 0    |

9 ay önceki gün olan ilk kontrol "Nisan" ayındadır.

**Örnek:** Bir hemşire 5 günde bir, doktor ise 8 günde bir nöbet tutar. İkisi beraber ilk nöbeti Salı tutarsa 10. nöbetini birlikte ne zaman tutar?

$$\text{OKEK}(5,8) = 40 \text{ gün (İkisi birlikte ilk nöbet tutarlarsa)}$$

10. nöbeti Salı tutarsa, 9 nöbet için 40 günde bir şekilde birlikte nöbet tutarlarsa;  $9 * 40 = 360$  gün sonra tutar.

$$360 \equiv x \pmod{7} \Rightarrow 360 = 7 * 51 + 3 \Rightarrow 360 \equiv 3 \pmod{7}$$

| Salı | Çarşamba | Perşembe | Cuma |
|------|----------|----------|------|
| 0    | 1        | 2        | 3    |

10. nöbetlerini Cuma birlikte tutar.

**Örnek:** DENİZDENİZDENİZ... şeklinde oluşturulan harf dizisine bakıldığında baştan 48. harf nedir?

DENİZ şeklinde periyodik giden seri 5'er serilerdendir.

$$48 = 5 * 9 + 3 \Rightarrow 48 \equiv 3 \pmod{5}$$

| Z | D | E | N | İ | Z | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |   |   |   |

48. harf "N" dir.

## T. PERMÜTASYON – KOMBİNASYON

### Saymanın Temel Kuralları

\*  $s(A) = a$  ve  $s(B) = b$ ; A ve B sonlu ve ayrık iki küme;

•  $s(A \cup B) = s(A) + s(B) = a + b$  (Toplama kuralı)

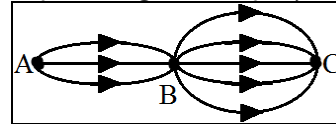
•  $s(A \times B) = s(A) * s(B) = a * b$  (Çarpma kuralı)

\* Ayrık olan iki işlemden biri a farklı yolla, diğeri ise b farklı yolla yapılabiliyorsa bu işlemler;

• "Veya / Ya da" bağlacı varsa  $\Rightarrow$  "a + b"

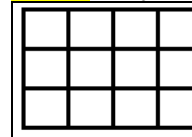
• "Ve" bağlacı varsa  $\Rightarrow$  "a \* b"

**Örnek:** A şehrinde B şehrine 3 farklı yol, B şehrinde C şehrine 5 farklı yol vardır. A şehrinde C şehrine gidecek olan biri B şehrine uğramak koşuluyla kaç farklı yoldan gider?



A'dan B'ye 3 farklı yol; B'den C'ye 5 farklı yol olduğuna göre ikisi de aynı anda istendiğine (ve) göre  $3 * 5 = 15$  farklı yol.

**Örnek:** 12 eş kareden oluşan şekilde kaç kare olabilir?



1x1 'lik kareler: 12 tane  
 2x2 'lik kareler: 6 tane  
 3x3 'lik kareler: 2 tane  
 Toplam kare : 20 tane

**Örnek:**  $A = \{1,2,3,4,5\}$  kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı sayılardan kaç tanesi 300'den büyüktür?

abc sayısının 300'den büyük olması için  $a=3,4,5$  olmalı.

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| 3     | 4 | 3 | Yüzler basamağı 3,4,5 gelebilir, 3 farklı sayı gelir.<br>Yüzler basamağında bir sayı kullanıldığından kalan dört sayıdan herhangi biri gelir. (farklı istendiğinden)<br>Yüzler ve onlar basamağında iki sayı kullanıldığından kalan üç sayı arasından herhangi biri kullanılır. |
| a     | b | c |   |
| 3,4,5 |   |   |   |

$3 * 4 * 3 = 36$  sayı vardır.

**Örnek:**  $A = \{0,1,2,3\}$  kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek rakamları farklı üç basamaklı kaç çift doğal sayı yazılabilir?

abc sayısının  $a \neq 0$  olmalı (Üç basamaklı olması için)

Çift doğal sayı istendiğinden  $c=0$  veya 2 alabilir.  $c=2$  iken  $a \neq 0$  olmadan ve 0'ı da b'de katacak şekilde hesaplanmalıdır.

|   |     |   |                                  |   |     |   |                                  |
|---|-----|---|----------------------------------|---|-----|---|----------------------------------|
| 3 | 2   | 1 | c=0 için<br>$3 * 2 * 1 = 6$ tane | 2 | 2   | 1 | c=2 için<br>$2 * 2 * 1 = 4$ tane |
| a | b   | c |                                  | a | b   | c |                                  |
| 1 | 2,3 | 0 |                                  | 1 | 0,3 | 2 |                                  |
| 2 | 1,3 |   |                                  | 3 | 1,3 |   |                                  |
| 3 | 1,2 |   |                                  |   |     |   |                                  |

6 + 4 = 10 tane

**Permütasyon:**

\* Permütasyon; sıralama (diziliş) demektir. Seçilmiş olan nesnelerin sıralanışı veya dizilişi söz konusudur.

\* n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonu:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}_{r \text{ tane carpan}}$$

\* n tane nesne hiç koşulsuz ve yan yana n! sayıda diziliş (sıralama) gerçekleştirir.

$$P(n,n) = n!$$

**Örnek:**

- $P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- $P(n,2) = 30 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$

**Örnek:** 8 kişinin katıldığı satranç turnuvasında, yarışmacılara verilecek olan ilk üç derece kaç farklı şekilde?

$$P(4,4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**Örnek:** Birbirinden farklı 3 fizik, 4 kimya ve 5 matematik kitabı boş bir rafta yan yana dizilecektir.

✚ Bu kitaplar kaç farklı biçimde sıralanabilir?

$$\text{Toplam} = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ kitap var.}$$

$$P(12,12) = 12! \text{ (Kendi sayısı kadar dizilimi olur.)}$$

✚ Aynı dersin kitapları yan yana durmak koşuluyla bu kitaplar boş bir rafta kaç farklı şekilde sıralanabilir?

$$3 \text{ Fizik kitabı kendi arasında } P(3,3) = 3!$$

$$4 \text{ Kimya kitabı kendi arasında } P(4,4) = 4!$$

$$5 \text{ Matematik kitabı kendi arasında } P(5,5) = 5!$$

Her ders kitapları yan yana olacağından dersleri tek kitap olarak sayarsak F:1, K:1, M:1 gibi kendi aralarında dizilmeleri  $P(3,3) = 3!$

$$\text{Kitaplar: } P(3,3) \cdot P(4,4) \cdot P(5,5) \cdot P(3,3) = 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3!$$

**Tekrarlı Permütasyon:**

\* Sıralanmış n tane elemandan; farklı a, b ve c türlerinden olan n elemanın yerlerinin değiştirilmesiyle oluşan farklı sıralamaların sayısı:

$$n = a + b + c \Rightarrow \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

**Örnek:** 1100222 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek 7 basamaklı kaç farklı sayı yazılır?

1 rakamı = 2 tane; 0 rakamı = 2 tane; 2 rakamı = 3 tane.

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210 \text{ (Tüm ihtimal)}$$

Sıfırın başa gelmeme ihtimali (7 basamaklıda iki sıfırın olmadığı durumlar):

$$210 \cdot \frac{7-2}{7} = 150 \text{ (İstenen durum)}$$

**Örnek:** BELLEK sözcüğündeki harflerin yeri değişerek yazılabilecek anlamlı – anlamsız 6 harfli kaç sözcük var?

B:1, E:2, L:2, K:1; Toplam 6 harf (n)

$$\binom{6}{1,2,2,1} = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 180 \text{ sözcük var.}$$

KPSSCini.com

**Dönel (Dairesel) Permütasyon:**

\* Basit kapalı bir eğri üzerinde (etrafında), n tane elemanın sıralanmasıdır. n tane elemanın dönel sıralaması:  $\frac{(n-1)!}{n}$

**Örnek:** 3 avukat, 4 öğretmen yuvarlak masa etrafında oturacaktır.

✚ Kaç farklı şekilde otururlar?

$$\text{Toplam} = 3 + 4 = 7 \text{ kişi}$$

$$(n-1)! = (7-1)! = 6! \text{ sayıda masada oturabilirler.}$$

✚ Aynı meslek grubuna ait kişiler yan yana oturmak koşuluyla, kaç farklı şekilde oturabilirler?

$$3 \text{ avukat kendi arasında } P(3,3) = 3!$$

$$4 \text{ öğretmen kendi arasında } P(4,4) = 4!$$

Her branştaki tek kişi sayılırsa; A:1, Ö:1 olup 1+1=2 kişi yuvarlak masa etrafında (n-1)!=(2-1)! = 1! farklı şekilde oturur. Genel olarak oturmaları:

$$P(3,3) \cdot P(4,4) \cdot (2-1)! = 3! \cdot 4! \cdot 1! \text{ şekilde otururlar.}$$

**Kombinasyon:**

\* Kombinasyon; seçim – seçme işlemleri yapar. Sıralama veya diziliş yoktur, nesnelere seçmiş olmak yeterlidir.

\* n elemanlı bir kümenin r'li kombinasyonu (alt kümeleri sayısı) C(n,r):

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

$$* \binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow \{a=b \parallel a+b=n\}$$

$$* \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$* \binom{n}{1} = n$$

$$* \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

\* n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı  $2^n$ :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

**Örnek:**

$$* C(7,3) = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = 7 \cdot 5 = 35$$

$$* C(n,2) = 21 \Rightarrow \frac{P(n,2)}{2!} = 21 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 42 \Rightarrow n = 7$$

**Örnek:** 8 kişi arasından 6 kişilik bir ekip kaç farklı şekilde seçilir?

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = \frac{P(8,2)}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ değişik şekilde.}$$

**Örnek:** 6 elemanlı bir kümenin en az 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} + \frac{6 \cdot 5}{2!} + 6 + 1 = 20 + 15 + 6 + 1 = 42 \text{ tane en az 3 elemanlı alt küme var.}$$

**Örnek:** 15 kişilik bir sınıftan bir başkan ve bir başkan yardımcısı kaç farklı şekilde seçilir?

Bir başkan sınıftan  $C(15,1)=15$  şekilde seçilir.  
Kalan 14 kişi içinde başkan yardımcısı da  $C(14,1)=14$  şekilde seçilir.

İkisi birlikte =  $15 * 14 = 210$  farklı şekilde seçilir.

**Örnek:** Bir sınıfta 10 erkek, 12 kız var. Bu sınıftan 1 erkek, 2 kız öğrenciden oluşan üç kişilik bir grup kaç farklı şekilde?

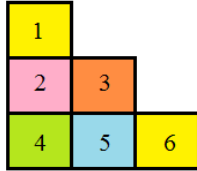
$$\binom{10}{1} * \binom{12}{2} = \frac{10}{1!} * \frac{12*11}{2!} = 10 * 66 = 660 \text{ değişik şekilde.}$$

**Örnek:** 5 pantolon ve 5 gömleği bulunan Ozan'ın, pantolonlarının üçü siyah, ikisi mavi; gömleklerinin ikisi siyah, üçü mavidir. Ozan, farklı renklerde 1 pantolon ve 1 gömleği kaç değişik şekilde giyer?

5 Pantolon : Siyah: 3, Mavi: 2  
5 Gömlek : Siyah: 2, Mavi: 3

$$\begin{aligned} \text{Giymme} &= [\text{Pantolon (Siyah)} * \text{Gömlek (Mavi)}] + [\text{Pantolon (Mavi)} * \text{Gömlek (Siyah)}] \\ \text{Giymme} &= [3 \text{ siyah (1 tane)} * 3 \text{ mavi (1 tane)}] + [2 \text{ mavi (1 tane)} * 2 \text{ siyah (1 tane)}] \\ \text{Giymme} &= [C(3,1) * C(3,1)] + [C(2,1) * C(2,1)] \\ \text{Giymme} &= 3 * 3 + 2 * 2 = 13 \text{ değişik biçimde gerçekleşir.} \end{aligned}$$

**Örnek:** Ayşen elindeki değişik renkteki 8 boya kalemini kullanarak şekilde verilen altı kareyi, 1 ve 6 numaralı kareler aynı renkte, diğer kareler de bu karelerden ve birbirinden farklı renklerde olacak şekilde boyanmak isteniyor. Bu boyama işi kaç farklı şekilde yapılabilir?

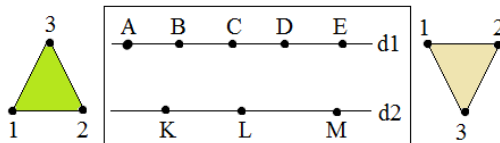


1 ve 6 no'lu kareler aynı renk boyanacağından kutuya 5 farklı renk seçilmelidir. Ayrıca istediği sırada boyayabilir (5 durum içinde):

$$C(8,5) * P(5,5) = \frac{P(8,3)}{3!} * 5! = \frac{8*7*6}{3!} * 5! = 6720 \text{ şekilde}$$

**Örnek:** d1 ve d2 doğruları birbirine paraleldir. Köşeleri şekildeki 8 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen çizilir?

(A, B, C, D, E ∈ d1; K, L, M ∈ d2)



$$\binom{5}{1} * \binom{3}{2} + \binom{5}{2} * \binom{3}{1} = 5 * 3 + 10 * 3 = 45 \text{ tane}$$

Veya; eksende 8 nokta, tüm durum – üçgen olmama durum;

$$\binom{8}{3} - \left( \binom{5}{3} + \binom{3}{3} \right) = 56 - (10 + 1) = 45 \text{ tane}$$

**Örnek:** 4 erkek ve 5 kız arasından 3 kişilik bir grup oluşturulacak. Bu gruptan en az birinin erkek olması istenirse bu grup kaç farklı şekilde oluşur?

$$(1e+2k) + (2e+1k) + (3e+0k) = \text{Tüm koşul} - (0e+3k)$$

$$\binom{4}{1} * \binom{5}{2} + \binom{4}{2} * \binom{5}{1} + \binom{4}{3} * \binom{5}{0} = 40 + 30 + 4 = 74 \text{ veya}$$

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 84 - 10 = 74 \text{ farklı şekilde}$$

## U. OLASILIK

|                   |   |   |
|-------------------|---|---|
| <b>Deney</b>      | Bir madeni para havaya atıldığında yazı mı, yoksa tura mı geleceğini, bir zar atıldığında üst yüzeye gelen sayının kaç olacağı vb. gibi tespit etme işlemleridir. |   |
| <b>Sonuç</b>      | Deneyde yapılan işlemin her bir çıktısıdır. Örneğin, paranın yazı gelmesi gibi.   |   |
| <b>Örnek Uzay</b> | Bir deneyin muhtemel bütün sonuçlarını eleman kabul eder. Evrensel kümedir.   |   |
| <b>OLAY</b>       | Herhangi bir örnek uzayın her bir alt kümesidir.  |   |
|                   | <b>İmkânsız Olay</b>  | $E = \emptyset$ (boş küme) ise                  |
|                   | <b>Kesin Olay</b>   | $E \neq \emptyset$ (boş olmayan küme) ise       |
|                   | <b>Ayrık Olay</b>   | $A \cap B = \emptyset$ ise ( $A, B \subset E$ ) |

- \* **p(A)** : Bir A olayının olma olasılığı
- p(B)** : Bir B olayının olma olasılığı
- p(A')** : Bir A olayının olma olasılığı
- s(A)** : A olayının kümesindeki eleman sayısı
- s(E)** : E örnek uzayının eleman sayısı ise;

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

$p(A)=0$  (İmkânsız olay)

$$p(A) + p(A') = 1$$

$p(A)=1$  (Kesin olay)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

(A ile B ayrık olaylar ise)

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

(A ile B bağımsız olaylar)

\* Bir madeni paranın art arda n defa havaya atılması durumundaki örnek uzayın eleman sayısı:  $s(E) = 2^n$

\* Bir tavla zarının n adet atılma durumu:  $s(E) = 6^n$

**Örnek:** İki adet tavla zarı aynı anda atılıyor. Buna göre;

⚡ Zarların üst yüzeylerinde gelen sayıların toplamının 5'ten büyük olma olasılığı nedir?

|               |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <b>1. Zar</b> | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| <b>2. Zar</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Tabloda 10 tane istenmeyen durum vardır. ( $\leq 5$ )

$$\text{İki adet zar atılırsa} \Rightarrow s(E) = 6^n = 6^2 = 36$$

$$p(A) + p(A') = 1 \Rightarrow p(A) = 1 - p(A') = 1 - \frac{10}{36} = \frac{13}{18}$$

⚡ Zarların üst yüzeylerinde aynı sayıların gelme olasılığı?

$$\text{İki adet zar atılırsa} \Rightarrow s(E) = 6^n = 6^2 = 36$$

|               |   |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|---|
| <b>1. Zar</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| <b>2. Zar</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Tabloda aynı sayıların gelme durumu 6 şekildedir.

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**Örnek:** Bir madeni para art arda 4 defa havaya atılıyor. Atışlardan ilk ikisi yazı, son ikisi tura gelme olasılığı nedir?

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>1. Atış</b> | <b>2. Atış</b> | <b>3. Atış</b> | <b>4. Atış</b> |
| Yazı           | Yazı           | Tura           | Tura           |

Her atışta iki ihtimal vardır. Biri gelmesi istendiğinden;

$$p_1(A) * p_2(A) * p_3(A) * p_4(A) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

**Örnek:** Bir sınıfın yoklama listesinden rastgele okunan bir ismin bir erkek öğrenciye ait olma olasılığı 4/7, bu sınıfta 21 kız öğrenci varsa toplam kaç öğrenci mevcuttur?

Erkek öğrenci = x kişi, kız öğrenci = 21 kişi  
Sınıf mevcudu = x + 21 kişi

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{x}{x+21} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7x = 4x + 84 \Rightarrow x = 28 \text{ kişi}$$

Sınıf mevcudu = x + 21 = 28 + 21 = 49 kişi

**Örnek:** Anne, baba ve 5 çocuk bir yuvarlak masa etrafında yemek yiyorlar. Anne ve babanın yemeği yan yana yeme olasılığı nedir?

Yuvarlak masa etrafında 7 kişi = (7-1)! = 6! Şekilde oturur.

Anne – baba yan yana oturması durumunda; A ile B: 1 kişi = 1! kendi aralarında 2! şekilde; çocuklar ise kendi aralarında P(5,5)=5! şekilde otururlarsa oturma durumu = 5!\*2!\*1!

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{5! \cdot 2! \cdot 1!}{6!} = \frac{1}{3} \text{ (İstenen durum)}$$

**Örnek:** 1'den 90'a kadar olan sayılar ayrı ayrı doksan topun üzerine yazılarak bir torbaya atılıyor. Üzerinde 6'ya kalansız bölünebilecek bir sayı olan topu çekmeyi garantilemek için en az kaç top çekilmelidir?

$$A = \{1 \leq 6 * x \leq 90\}$$

$$T.S. = \frac{S.T. - 1.T.}{A.O.} + 1 = \frac{90 - 6}{6} + 1 = 15 \text{ tane 6'ya bölünen sayı}$$

15 tane 6'ya kalansız bölünen sayı varsa, 90 – 15 = 75 tane de 6'ya bölünmeyen sayı vardır. İstenen en az çekildiğinde 6'ya bölünen sayıyı bulmak için 6'ya bölünmeyen tüm sayı çekilmeli ve geriye kalanlardan çekilecek 1 tane şartı sağlar. Buna göre 75 + 1 = 76. top çekildiğinde 6\*k top gelir.

**Örnek:** 1. Torba: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (8 top)  
2. Torba: 0, 1, 2, 3 (4 top)

İki torbada mevcut toplarda yazılı olan numaralar mevcuttur. Bu torbalardan rastgele birer top çekilir. Çekilen iki topun üzerinde yazılı olan rakamların toplamının 7 olma olasılığı nedir?

$$s(E) = s(E_1) * s(E_2) = \binom{8}{1} * \binom{4}{1} = 32 \text{ Tüm durum}$$

$$s(A) = s(\{(7,0), (6,1), (5,2), (4,3)\}) = 4 \text{ (} x_1 + x_2 = 7 \text{)}$$

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ (Toplamının 7 olma olasılığı)}$$

**Örnek:** Bir torbada 2 kırmızı, 2 beyaz, 1 sarı top var. Torbadan çekilen top geri bırakılmadan art arda 2 tane çekilirse ikinci çekilen topun sarı olma olasılığı nedir?

$$s(E) = 2 + 2 + 1 = 5 \text{ Tüm durum}$$

Çekilme durumu: 1(K) 2(S) + 1(B) 2(S) (2.nin sarı olması)

$$p(A) = \frac{s(A_K) * s(A_S) + s(A_B) * s(A_S)}{s(E) * s(E) - 1} = \frac{s(A_K) * s(A_S) + s(A_B) * s(A_S)}{s(E) * s(E) - 1}$$

$$p(A) = \frac{2}{5} * \frac{1}{5-1} + \frac{2}{5} * \frac{1}{5-1} = \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \frac{1}{5}$$

**Örnek:** 12 kız, 15 erkek öğrenciden oluşan bir sınıfta kızların yarısı gözlüklüdür, erkeklerin 9'su gözlüksüzdür. Sınıftan seçilen bir öğrencinin kız veya gözlüksüz olma olasılığı nedir?

|                   | Gözlüklü (Gx) | Gözlüksüz (Gy) | TOPLAM (T) |
|-------------------|---------------|----------------|------------|
| Kız Öğrenci (Y)   | 6             | 6              | 12         |
| Erkek Öğrenci (X) | 9             | 6              | 15         |

Sınıf mevcudu = s(E) = 27 kişi

Seçilen öğrencinin kız veya gözlüksüz olma olasılığı:

$$p(Y \cup Gy) = p(Y) + p(Gy) - p(Y \cap Gy)$$

$$p(Y \cup Gy) = \frac{s(Y)}{s(E)} + \frac{s(Gy)}{s(E)} - \frac{s(Y \cap Gy)}{s(E)}$$

$$p(Y \cup Gy) = \frac{12}{27} + \frac{15}{27} - \frac{6}{27} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

**Örnek:** Bir torbada 3 sarı, 2 kırmızı ve 4 mavi bilye var. Torbaya bakılmadan aynı anda üç bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin farklı olma olasılığı nedir?

$$s(E) = \binom{9}{3} = \frac{9 * 8 * 7}{3!} = 84 \text{ tür (tüm durum için)}$$

Üç çekilen bilyenin her birinin farklı olması istendiğinden;

$$s(A) = \binom{3}{1} * \binom{2}{1} * \binom{4}{1} = 3 * 2 * 4 = 24 \text{ tür}$$

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

**Örnek:** Bir kutuda 20 yumurtadan 8'i kırık. Kutudan seçilen 2 yumurtanın 2'sinin de kırık olma olasılığı?

$$p(A) = \frac{s(A_1) * s(A_2)}{s(E) * s(E) - 1} = \frac{8}{20} * \frac{8-1}{20-1} = \frac{56}{380} = \frac{14}{95}$$

**Örnek:** 8 evli çift arasından rastgele seçilen iki kişinin birbiriyle evli olma olasılığı nedir?

8 evli çift = 16 kişi

1 evli çift = 2 kişi (Bu iki kişiyi (çifti) tek kişi sayarsak)

16 kişi – 1 çift = 15 kişi ihtimali arasından olasılık:

$$p(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{2-1}{16-1} = \frac{1}{15}$$

**Örnek:** Bir yarışta Ayşe'nin kazanma olasılığı 3/4, Onur'un kazanma olasılığı 2/3'tür. Bu iki kişi aynı yarışta yer aldığında bunlardan sadece birinin bu yarışta kazanma olasılığı nedir?

Ayşe kazanırsa Onur kazanamaz + Onur kazanırsa Ayşe kazanamaz şeklindedir:

$$p(A) * p(O') + p(A') * p(O) = \frac{3}{4} * \frac{3-2}{3} + \frac{4-3}{4} * \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

**Örnek:** Bir torbadaki kırmızı bilye sayısı, beyaz bilye sayısının 2 katıdır. Bu torbadan geri konulmadan art arda 2 bilye çekilirse ikisinin de beyaz olma olasılığı 5/51 ise torbada kaç kırmızı bilye vardır?

$$s(K) = 2 * s(B) \Rightarrow s(B) = x, s(K) = 2x \text{ olsun.}$$

$$\frac{x}{3x} * \frac{x-1}{3x-1} = \frac{5}{51} \Rightarrow 17 * (x-1) = 5 * (3x-1) \Rightarrow x = 6 \text{ bilye}$$

$$s(K) = 2 * x = 2 * 6 = 12 \text{ bilye (kırmızı bilye)}$$

**Örnek:** İki torbadan birinde 6 mavi, 4 beyaz; ikincisinde 3 mavi, 5 beyaz boncuk var. Birinci torbadan rastgele bir boncuk çekilmiş ve renge bakılmadan ikinci torbaya atılmış. İkinci torbadan çekilen bir boncuğun mavi olma olasılığı?

İlk durum: 1. Torba (6 M, 4 B), 2. Torba (3 M, 5 B)

2. durum: Mavi atıldı ise: 1. T (5 M, 4 B), 2. T (4 M, 5 B)

Beyaz atıldı ise: 1. T (6 M, 3 B), 2. T (3 M, 6 B)

Olasılıklar: 1 (M) \* 2 (M) + 1 (B) \* 2 (M)

$$p(A) = \frac{6}{10} * \frac{4}{9} + \frac{4}{10} * \frac{3}{9} = \frac{24}{90} + \frac{12}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$